Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Уральский государственный университет
им. А.М.Горького

Ю.М.Важенин

САМОУЧИТЕЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Екатеринбург
1996

510.51+412.1
В129

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Уральского государственного университета им. А.М.Горького

Важенин Ю.М. Самоучитель решения задач с параметрами. Екатеринбург:УрГУ, 1996, 84 с.

Учебное пособие по своему замыслу и структуре предназначено для самообразования. Оно посвящено одному из наиболее трудных разделов школьного курса математики – задачам с параметрами. Материал излагается в соответствии с естественной классификацией таких задач по их постановкам. Это значительно облегчает процесс вхождения в задачу и четкого понимания того, что дано и что требуется. Выпукло продемонстрированы аналитические и геометрические методы решения. Приведено достаточное количество упражнений для самостоятельного решения. Представлены образцы билетов по математике на вступительных экзаменах в вузы Екатеринбурга. В разделе “Кунсткамера” собраны редкие по постановкам и трудности решения задачи с параметрами. Большая часть задач снабжена ответами.

Для школьников, абитуриентов, учителей математики, преподавателей и слушателей подготовительных курсов вузов, преподавателей и студентов педагогических специальностей вузов.

ISBN 5-230-06765-9

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 4. РЕПЕТИЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

Основной составляющей работы по освоению математических знаний является самостоятельный труд, или самообучение. Именно поэтому лежащую перед Вами книжку я назвал самоучителем, сознательно употребив впервые в учебной математической литературе термин, широко использовавшийся ранее в словосочетаниях "самоучитель игры на семиструнной гитаре", "самоучитель игры в шахматы" и т.п. Структура ее текста и система изложения рассчитаны на самостоятельную работу учащегося. Математический текст предваряет урок 0, имеющий вводно-ознакомительный характер. Последующий материал разбит на части, названные темами. Каждая из тем соответствует одному из главных персонажей задач с параметрами, т.е. уравнениям, неравенствам, системам. К ним добавлена тема "Репетиции", роль которой отражена в ее названии. Каждая из первых трех тем естественным образом разбита на два задания, соответствующих прямой и обратной задачам. Задания, в свою очередь, состоят из уроков. Разумеется, деление материала на уроки достаточно условно. Оно вовсе не означает, что на один урок требуется точно один академический час, т.е. 45 минут, т.к. темпы усвоения новой информации – дело сугубо индивидуальное. Проработка материала одного урока должна состоять из двух частей: самообучения путем разбора решений задач из первой половины урока; отработки и закрепления полученных навыков при решении упражнений из второй половины урока с последующим контролем решения при помощи ответов. При этом следует понимать, что совпадение полученного Вами и приведенного в книге ответов еще не гарантирует правильности решения, поскольку, например, можно сделать четное число взаимоисключающих ошибок и получить правильный ответ. Иными словами, при совпадении Вашего и книжного ответов не надо впадать в эйфорию от радости победы, а необходимо еще раз проанализировать найденное Вами решение, *начиная с проверки правильности списывания в тетрадь условия задачи.* Материал последней, четвертой, темы "Репетиции" – образцы билетов вступительных экзаменов 1994 и 1995 годов во все гражданские вузы Екатеринбурга, проводящие письменный экзамен по математике, – должен послужить для репетиций вступительных экзаменов в избранный вуз с соблюдением стандартных экзаменационных условий: в течение четырех астрономических (по 60 минут) часов необходимо решить задачи одного варианта в любом удобном для Вас порядке, проверить решения и переписать все начисто. Завершает эту книжку список литературы, которую я использовал при написании самоучителя и которой может воспользоваться читатель для совершенствования своей математической подготовки.

Ваши вопросы по этой книге можно задать устно по телефону (34-32) 55-82-74 или письменно по адресу: 620083, Екатеринбург, пр.Ленина, 51, УрГУ, деканат ФПКП математики.

Урок 0. Исходные понятия, соглашения, примеры

Задачи с параметрами встречаются фактически с самого начала изучения математики, когда начинают оперировать с буквами, как с числами. Однако выражение "задача с параметрами" употребляется обычно в следующем более узком смысле: задача, связанная с решением уравнений и неравенств или исследованием функций, в запись которых наряду с переменными входят буквы, называемые параметрами. Задачами с параметрами именно в таком смысле мы и будем заниматься. Условимся о следующих обозначениях и терминах. Пусть

$N=\{1, 2, ...\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\omega=\{0, 1, 2, ...\}$ – множество всех натуральных чисел с нулем;

$Z=\{0, \pm 1, \pm 2,...\}$– множество всех целых чисел;

запись $a \in M$ означает, что a принадлежит M или, подробнее, a является элементом множества M; запись $a \notin M$, напротив, означает, что a не принадлежит M; $M=\{x|\ p(x)\}$ означает, что множество M состоит из тех и только тех элементов x, которые удовлетворяют условию $p(x)$;

$Q=\left\{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N\right\}$ – множество всех рациональных чисел;

R – множество всех действительных чисел.

Букву, встречающуюся в математических выражениях, таких, например, как многочлены, называют по-разному: переменная (величина), неизвестная (величина), переменное (значение), неизвестное (значение), параметр, константа. При этом первые четыре используются как синонимы и для их обозначения употребляют последние буквы латинского алфавита: s, t, u, v, x, y, z. Параметр и константа тоже часто выступают как синонимы, и для их обозначения обычно используют буквы a, b, c, d, p, q. Мы будем употреблять термины "переменная", "неизвестная" и "параметр".

Общие рассуждения и принципы, относящиеся к рассмотрению задач обсуждаемого типа, я приведу применительно к уравнениям с одной неизвестной и одним параметром. Все сказанное естественным образом переносится на уравнения и неравенства с несколькими неизвестными и параметрами.

Уравнение с неизвестной или переменной x и параметром a – это равенство вида $f(x,a)=g(x, a)$ (*), где $f(x,a)$,

$g(x,a)$ – выражения, в запись которых вместе с числами и знаками операций входят буквы a и x. *Корнем* или *решением* уравнения (*) при данном значении a_0 параметра a называется действительное число x_0, такое, что $f(x_0,a_0)=g(x_0,a_0)$ – верное числовое равенство. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения (*) называется совокупность тех и только тех значений неизвестной и параметра, при которых левая $f(x,a)$ и правая $g(x,a)$ части уравнения имеют смысл, т.е. могут быть вычислены их значения.

С уравнением (*) можно связать две основные взаимнообратные задачи, которые я называю прямой и обратной. *Прямая задача*: для каждого значения параметра a найти все корни уравнения (*) или, кратко, решить уравнение (*). *Обратная задача*: найти все значения параметра a, при которых корни уравнения (*) удовлетворяют данным условиям. Решая прямую задачу, мы занимаемся почти привычным делом – решением уравнения с буквенными коэффициентами. Иными словами, мы смотрим на параметр как на данное число или константу и находим значения неизвестной в зависимости от этой константы. Однако исходная произвольность значений параметра может доставить много хлопот. Например, решение уравнения $2x=4$ сводится к делению его, т.е. его обеих частей, на 2 и записи ответа $x=2$. Решение же похожего уравнения $(a^2+a\cdot 2)x=4$ уже требует осторожности и рассмотрения отдельно случаев равенства и неравенства нулю коэффициента при x, в результате чего возникает значительно более сложный ответ: если $a=-1$ или $a=1$, то решений нет; если $a\neq-2$ и $a\neq 1$, то $x=\dfrac{4}{a^2+a-2}$. Более того, наличие параметра может заставить предпринимать прямо-таки революционные шаги в решении. Примером тому может служить следующая задача.

№1. Решить уравнение $x^4-2x^2(a+2)-8x+a^2-4=0$. Попытки решить его группировкой или подбором корней не кажутся уж очень соблазнительными. Однако можно заметить, что рассматриваемое уравнение *является квадратным относительно параметра*. Поэтому возникает достаточно фантастическая идея – решать уравнение как квадратное, выражая параметр через неизвестную: перепишем уравнение в виде $a^2-2ax^2+(x^4-4(x+1)^2)=0$, откуда $a_{1,2}=x^2\pm 2(x+1)$. Таким образом, Вам осталось решить два несложных квадратных уравнения с параметром: $x^2+2x+2-a=0$, $x^2-2x-(2+a)=0$.

Если прямая задача с методологической точки зрения не нова по сравнению с задачей решения уравнения без параметров, то обратная задача обладает качественной новизной, не имея аналогов в области обычных уравнений. К тому же конкретные постановки обратной задачи отличаются большим многообразием и зависят, в частности, от вида условий, налагаемых на корни. Например, относительно одного и того же уравнения $(a^2+a-2)x=4$ можно поставить следующие обратные задачи: найти все значения параметра a, при которых указанное уравнение

№2. Не имеет корней. $a \angle -3$

№3. Равносильно уравнению $(a+2)x=1$.

№4. Имеет корни, лежащие на отрезке $[0;2]$.

Решите эти задачи самостоятельно.

На протяжении всей книги, за исключением темы 4, мы будем заниматься лишь прямой и обратной задачами. Разумеется можно рассматривать и другие задачи, относящиеся к уравнениям с параметрами. Например, нередко рассматривают *смешанную задачу*: найти все значения параметра a, при которых корни уравнения удовлетворяют данным условиям, и при этих значениях a найти соответствующие корни. Есть задачи с параметрами, которые невозможно уложить в мою схему “прямая-обратная задача”. Такова, например, задача

№5. Найти все $x<0$, удовлетворяющие уравнению $(a^2+a-2)x=4$ для всех a таких, что $|a|<1$.

Задачи подобного рода я отнес к "естественно-научным редкостям", собрал из них небольшую коллекцию, назвал ее “Кунсткамера” и поместил в конце книги. Следует еще отметить, что нередко в литературе можно встретить задачи с параметрами, под вычурной формулировкой которых скрывается прямая или обратная задача. Покажем это на примерах, которые следует решить самостоятельно.

№6. При каких значениях параметра a неравенство $x^2-ax+a^2-6a\ge 0$ (1) выполняется при всех $x\in[-1;1]$? Равносильная формулировка в виде обратной задачи: найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства (1) включает отрезок $[-1;1]$.

№7. При каких a из $x<2$ следует $ax^2+(a+1)x-3<0$ (2)? Равносильная формулировка: найти все значения a, при которых среди решений неравенства (2) находятся все $x<2$.

№8. При каких a неравенство $ax^2-x+1-a<0$ (3) влечет неравенство $0<x<1$? Равносильная формулировка: найти все значения параметра a, при которых решения x неравенства (3) удовлетворяют двойному неравенству $0<x<1$.

Важно научиться находить равносильные формулировки одной и той же задачи, поскольку это позволяет выбрать наиболее ясную из них и четко осознать, что дано и что требуется сделать. Понимание этих двух вещей может значительно облегчить решение задачи, а порой указывает и продуктивный путь ее решения.

Поговорим теперь о методах решения задач с параметрами. Можно выделить два главных из них – аналитический и геометрический. При этом нередко одну и ту же задачу можно решить и тем и другим методом. Выбор одного из них может зависеть от вкуса решающего или от степени краткости и убедительности соответствующего решения. Не тратя усилий на общее описание методов, проиллюстрирую их применение на конкретных примерах. Здесь и ниже я буду использовать следующие широко употребляемые обозначения:

$p \Rightarrow q$ – p влечет q; если p, то q; q – следствие p;

$p \Leftrightarrow q$ – p равносильно q; p эквивалентно q; p тогда и только тогда, когда q;

$p \Rightarrow \varnothing$ – если p, то множество решений пусто;

если p и q являются, например, уравнениями, то $p \Rightarrow q$ означает, что любое решение р является решением q; $p \Leftrightarrow q$ означает, что множества решений p и q одинаковы, т.е. любое решение p является решением q и, наоборот, любое решение q есть решение p.

Рассмотрим уравнение $\left|x^2-1\right|-a=0$ (4) и решим прямую и одну из обратных задач, связанные с ним.

Прямая задача. Решить уравнение (4). *Решение аналитическое*. Поскольку (4) $\Leftrightarrow \left|x^2-1\right|=a$, заключаем, что $a \geq 0$. Рассмотрим два случая, в каждом из которых известен знак подмодульного выражения и, следовательно, знак модуля можно опустить. (а) $|x| \geq 1$; тогда $x^2=a+1 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1+a}$; ясно, что $|x_1| \geq 1$ и $|x_2| \geq 1$; значит, $a \geq 0 \;\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1+a}$; (б) $|x| \leq 1$; тогда $x^2 = 1-a \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 1$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{1-a}$; ясно, что x_3, x_4, также удовлетворяют условию рассматриваемого случая, т.е. $|x_3| \leq 1$ и $|x_4| \leq 1$; стало быть, $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{1-a}$.

Ответ: $a<0 \Rightarrow \varnothing$; $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1+a}, x_{3,4} = \pm\sqrt{1-a}$; $a > 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1+a}$.

Геометрический метод имеет две основные разновидности: решение в координатной плоскости Oxa и в координатной плоскости Oxy. Продемонстрируем их.

Решение геометрическое в плоскости Oxa. Изобразим эскиз графика уравнения (4) в координатной плоскости Oxa, записав это уравнение удобства ради в виде $a = |x^2 - 1|$, т.е. в привычном виде задания a как функции аргумента x (рис.1).

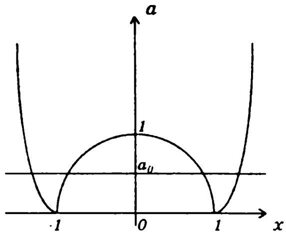


Рис.1

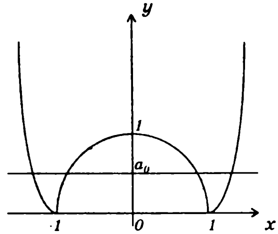


Рис.2

Ясно, что корень уравнения (4) при данном значении a_0 параметра есть абсцисса точки пересечения графика уравнения с графиком прямой $a = a_0$. Отсюда сразу становится очевидным, что ответ можно записать в следующем более подробном, чем выше, виде .

Ответ: $a < 0 \Rightarrow \varnothing$; $a=0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$; $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1+a}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{1-a}$; $a > 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1+a}$.

Решение геометрическое в плоскости Oxy. Считая a константой, рассмотрим две функции $y = |x^2 - 1|$, $y = a$.

Легко понять, что при данном значении a_0 параметра число x_0 будет решением уравнения (4) тогда и только тогда, когда x_0 – абсцисса точки пересечения графиков первой функции и функции $y = a_0$. Это замечание и позволяет, рассматривая рис.2, получающийся из предыдущего заменой оси *Oa* осью *Oy*, записать тот же ответ.

Обратная задача. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение (4) имеет 0, 1, 2, ... корней.

Решение аналитическое. Оно здесь является очень нерациональным ибо, по существу, предполагает решение прямой, а затем обратной задачи. Причем, получив ответ к прямой задаче, Вы должны провести кропотливые рассмотрения по извлечению из него ответа к задаче обратной. Таким образом получаем

Ответ: $a<0 \Rightarrow 0$ корней; $a=0,\ a>1 \Rightarrow 2$ корня; $0<a<1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4$ корня.

Решение геометрическое как в плоскости *Oxa*, так и в плоскости *Oxy* сразу после изображения графиков позволяет записать приведенный только что ответ, основываясь на особенностях строения графиков функций $y = \left| x^2 - 1 \right|, y = a$.

ТЕМА 1. УРАВНЕНИЯ

Задание 1.1. РЕШИТЬ в зависимости от значений параметров

Урок 1. Алгебраические уравнения

№1. $(a^2-1)x=a+1$ *Решение.* Необходимость разрешения уравнения относительно неизвестной x диктует рассмотрение двух случаев: (а) $a^2-1=0$; тогда $a=1$ или $a=-1$; если $a=1$, то исходное уравнение принимает вид $0\cdot x=2$ и не имеет корней; если же $a=-1$, то имеем $0\cdot x=0$, т.е. здесь любое число из R является корнем нашего уравнения; (б) $a^2-1\neq 0$, т.е. $a\neq\pm 1$; тогда $x=\dfrac{a+1}{a^2-1}$ и, окончательно, $x=\dfrac{1}{a-1}$.

В дальнейшем мы будем оформлять решение задачи как правило кратко с минимумом словесных объяснений, заменяя, как это отмечено в уроке 0, фразы типа "если p, то q" или "из условия p следует q" выражением $p\Rightarrow q$. Например, только что изложенное решение в краткой записи будет выглядеть следующим образом. *Решение.* (а) $a^2-1=0\Rightarrow a=1,\ a=-1;$ $a=1\Rightarrow 0\cdot x=2\Rightarrow$ корней нет; $a=-1\Rightarrow 0\cdot x=0\Leftrightarrow R$. (б) $a^2-1\neq 0\Rightarrow$
$$\Rightarrow x=\frac{a+1}{a^2-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{a-1}.$$

Ответ: $a=1\Rightarrow\varnothing$; $a=-1\Rightarrow R$; $a\neq\pm 1\Rightarrow\ x=\dfrac{1}{a-1}$.

№2. $ax^2-2x+4=0$. *Решение.* (а) $a=0\Rightarrow -2x+4=0\Leftrightarrow x=2$;
(б) $a\neq 0\ \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{a}$ и $1-4a\geq 0$.

Ответ: $a=0\Rightarrow x=2$; $a\neq 0$ и $a\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{a}$;
$a>\dfrac{1}{4}\Rightarrow\varnothing$.

№3. $ax^4-x^3+a^2x-a=0$ (*). *Решение.* (*) $\Leftrightarrow$ $x^3(ax-1)+a(ax-1)=0\ \Leftrightarrow(ax-1)(x^3+a)=0\ \Leftrightarrow\ ax-1=0$ или

$x^3 + a = 0 \Leftrightarrow ax = 1$ или $x^3 = -a$; $a \neq 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{a}$, $x_2 = -\sqrt[3]{a}$; $a = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{a}$.

Ответ: $a \neq 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{a}$, $x_2 = -\sqrt[3]{a}$; $a = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{a}$.

№4. $|x+3| - a|x-1| = 4$ (*). *Решение* удобно разбить на ряд случаев, в каждом из которых известен знак каждого подмодульного выражения. Для этого применим схему, похожую на схему метода интервалов:

Знак $x+3$	–	+	+
Знак $x-1$	–	–	+
Обозначения случаев	(а)	(б)	(в)
	-3	1	x

(а) $x \le -3$: (*) $\Rightarrow -x-3-a(1-x) = 4 \Leftrightarrow -x-3-a+ax = 4 \Leftrightarrow (a-1)x = a+7$; $a = 1 \Rightarrow 0 \cdot x = 8 \Rightarrow \varnothing$; $a \neq 1 \Rightarrow x = \dfrac{a+7}{a-1}$, поскольку $x \le -3$, имеем $\dfrac{a+7}{a-1} \le -3 \Rightarrow \dfrac{a+7+3a-3}{a-1} \le 0 \Rightarrow \dfrac{4 \cdot (a+1)}{a-1} \le 0 \Rightarrow -1 \le a < 1$.

(б) $-3 < x \le 1$: (*) $\Rightarrow x+3-a \cdot (1-x) = 4 \Leftrightarrow (a+1) \cdot x = a+1$; $a = -1 \Rightarrow -3 < x \le 1$;

(в) $a \neq 1 \Rightarrow x = 1$, т.е. $1 - a \neq 0 \Rightarrow \varnothing$, т.к. по условию (в) $x > 1$. Для записи ответа соберем вместе полученную во всех трех случаях информацию: (а) $a = 1 \Rightarrow \varnothing$, $-1 \le a < 1 \Rightarrow x = \dfrac{a+7}{a-1}$; (б) $a = -1 \Rightarrow -3 < x \le 1$, $a \neq -1 \Rightarrow x = 1$; (в) $a = 1 \Rightarrow x > 1$, $a \neq 1 \Rightarrow \varnothing$. Упорядочивая ее, запишем ответ в форме

$$a < -1 \Rightarrow x = 1;\ a = -1 \Rightarrow x = \frac{a+7}{a-1} \text{ или } -3 < x \le 1;$$

$$-1 < a < 1 \Rightarrow x = \frac{a+7}{a-1} \text{ или } x = 1;\ a = 1 \Rightarrow x > 1;\ a > 1 \Rightarrow x = 1.$$

Окончательная форма ответа может быть более систематизированной:

Ответ: $|a|>1 \Rightarrow x=1;\ a=-1 \Rightarrow -3\le x\le 1;\ |a|<1 \Rightarrow x_1=\dfrac{a+7}{a-1}$, $x_2=1;\ a=1 \Rightarrow x\ge 1.$

№5. $2|x|+|a|-x-1=0\ (*)$. *Решение.* (а) $x\ge 0,\ (*) \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+|a|-x-1=0 \Leftrightarrow x=1-|a|;$ **по условию** $x\ge 0$, **т.е. параметр должен удовлетворять условию** $1-|a|\ge 0 \Leftrightarrow |a|\le 1;$ (б) $x<0: (*) \Rightarrow$ $\Rightarrow -2x+|a|-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{|a|-1}{3};$ **по условию** $x<0$, **т.е.** $\dfrac{|a|-1}{3}<0 \Leftrightarrow |a|<1;$ **поскольку** $\dfrac{|a|-1}{3}=0 \Leftrightarrow |a|=1$, **получаем**

Ответ: $|a|\le 1 \Rightarrow x_1=1-|a|,\ x_2=\dfrac{|a|-1}{3};\ |a|>1 \Rightarrow \varnothing.$

Заметим, что рассмотренную задачу можно достаточно изящно решить и геометрически, используя координатную плоскость Oxa.

№6. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}-a=0$ (1). *Решение.* ОДЗ: $x\ge -a, x\ge 0;$ **поскольку** (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+a}+\sqrt{x}=a$ (2) **и левая часть этого уравнения неотрицательна, дополнительно к условиям ОДЗ налагаем условие** $a\ge 0$; **откуда с учетом ОДЗ получаем** $\{x\ge 0,\ a\ge 0$ (3); **при этих условиях** (2)$\Leftrightarrow(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})^2=a^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{x(a+x)}=a^2-a-2x$ (4); **теперь к условиям (3) добавляем еще условие** $a^2-a-2x\ge 0$ (5); **в условиях (3), (5) имеем** (4) $\Leftrightarrow (2\sqrt{x(a+x)})^2=(a^2-a-2x)^2 \Leftrightarrow 4a^2x=a^4-2a^3+a^2;$ $a=0 \Rightarrow x=0$ **в силу (3), (5);** $a>0 \Rightarrow x=\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2$, **отсюда, добиваясь выполнения условия (5), получаем** $a^2-a-\dfrac{(a-1)^2}{2}\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\ge 1;$ **следовательно,**

Ответ: $a=0 \Rightarrow x=0;\ a\ge 1 \Rightarrow x=\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2;\ a<0,\ 0<a<1 \Rightarrow \varnothing.$

№7. $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$ (1). *Решение.* ОДЗ: $a+x\geq 0$, $a+\sqrt{a+x}\geq 0$; дополнительное условие: $x\geq 0$. При выполнении этих трех условий имеем $(1)\Leftrightarrow a+\sqrt{a+x}=x^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{a+x}=x^2-a$ (2). Равенство (2) дает еще одно дополнительное условие: $a\leq x^2$. Если теперь, избавляясь от радикала, возвести последнее равенство в квадрат, то мы получим сложное уравнение $a+x=x^4-2ax^2+a^2$ (3) 4-й степени относительно x, решить которое обычным путем будет весьма затруднительно. Поэтому мы пойдем путем геометрическим. Рассмотрим две функции $y=\sqrt{a+x}, y=x^2-a$. Очевидно, что абсциссы точек пересечения графиков этих функций и только они будут решениями уравнения (2). Если мы их найдем, то нам останется лишь применить условие ОДЗ и два дополнительных условия. Поскольку любая точка $M_0(x_0,y_0)$ лежит на графике первой функции тогда и только тогда, когда $y_0=\sqrt{a+x_0}$, что равносильно при условиях $y_0\geq 0$, $a+x_0\geq 0$ равенству $x_0=y_0^2-a$, заключаем, что точка M_0 лежит на графике 1-й функции тогда и только тогда, когда симметричная ей относительно биссектрисы первого координатного угла точка $M_1(y_0,x_0)$ лежит на графике 2-й функции. Таким образом, точки пересечения рассматриваемых графиков лежат в 1-й четверти координатной плоскости и принадлежат прямой с уравнением $y=x$. Отсюда и из равенства, задающего 2-ю функцию, заключаем, что искомые абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению $x=x^2-a$. Следовательно, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

Теперь на a необходимо наложить условие $a\geq-\dfrac{1}{4}$ и, рассматривая случаи $-\dfrac{1}{4}\leq a\leq 0$ и $a>0$, выяснить, при каких a для x_1 и x_2 выполняются условия ОДЗ и два дополнительных условия. В результате этого исследования получаем

Ответ: $a<-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\varnothing$; $-\dfrac{1}{4}\leq a\leq 0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$;

$a>0\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Заметим, что эту задачу можно достаточно просто решить и аналитически, если уравнение (3) решать как квадратное относительно параметра a, аналогично тому, как это было объяснено в уроке 0 при разборе задачи №1.

Упражнения

№8. $\dfrac{x+1}{x^2+1}=a$. №9. $(a^2+a-2)x^2-2a^2+a+1=0$. №10. $x^2+|x|+a=0$. №11. $|x+1|+a\cdot|1-2x|=\dfrac{3}{2}$. №12. $x-|a-1-x|-|2a-x|=0$. №13. $x-a=2\left|2\cdot|x|-a^2\right|$. №14. $|x^2-5x+6|=ax$. №15. $\sqrt{x^2-1}=a-x$. №16. $\sqrt{x-a}+\sqrt{2x+a-1}=0$. №17. $x^2-\sqrt{a-x}=a$ №18. $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$.

Ответы

№8. $a<\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, $a>\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varnothing$; $a=0\Rightarrow x=-1$; $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\le a<0$, $0<a\le\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{-4a^2+4a+1}}{2a}$. №9. $a<-2$, $-\dfrac{1}{2}\le a<1$, $a>1\Rightarrow x_{1,2}=\sqrt{\dfrac{2a+1}{a+2}}$; $-2\le a<1\Rightarrow\varnothing$, $a=1\Rightarrow x\in R$. №10. $a\le 0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$; $a>0\Rightarrow\varnothing$. №11. $|a|>\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$; $a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x\ge\dfrac{1}{2}$; $|a|<\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{2a-5}{4a+2}$; $a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow -1\le x\le\dfrac{1}{2}$.
№12. $a<1\Rightarrow\varnothing$; $a\ge 1\Rightarrow x_1=a+1$, $x_2=3a-1$. №13. $|a|>2$, $a=2\Rightarrow x_1=\dfrac{2a^2+a}{5}$, $x_2=\dfrac{2a^2-a}{3}$; $-2\le a<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{a\pm 2a^2}{5}$, $x_{3,4}=\dfrac{-a\pm 2a^2}{3}$; $-\dfrac{1}{2}\le a\le 0\Rightarrow x_1=\dfrac{a-2a^2}{5}$, $x_2=\dfrac{2a^2-a}{3}$; $0<a<2\Rightarrow\varnothing$.
№14. $a\le -5-2\sqrt{6}$, $a>5-2\sqrt{6}\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{a+5\pm\sqrt{a^2+10a+1}}{2}$; $-5-2\sqrt{6}<a<0\Rightarrow\varnothing$; $0\le a\le 5-2\sqrt{6}\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{a+5\pm\sqrt{a^2+10a+1}}{2}$,

$x_{3,4} = \dfrac{5 - a \pm \sqrt{a^2 - 10a + 1}}{2}$. **№15.** $a < -1,\ 0 \le a < 1 \Rightarrow \varnothing;$

$-1 \le a < 0,\ a \ge 1 \Rightarrow x = \dfrac{a^2 + 1}{2a}$. **№16.** $a \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 1 - 2a;\ a > \dfrac{1}{3} \Rightarrow \varnothing$

№17. $a < -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \varnothing;\ -\dfrac{1}{4} \le a \le 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$. **№18.** $a < -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \varnothing;$

$-\dfrac{1}{4} \le a \le 0 \Rightarrow x_{1,2} = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}\right)^2;\ a > 0 \Rightarrow x = \left(\dfrac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}\right)^2.$

Урок 2. Показательные и логарифмические уравнения

№1. $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$. *Решение*. Замена $t = 12^{|x|}$ переводит исходное уравнение в уравнение $t^2 - 2t + a = 0$, решая которое получаем $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Для существования $t_{1,2}$ потребуем, чтобы $a \le 1$, и, поскольку $12^{|x|} \ge 1$ при всех x, полагаем $t_1 \ge 1, t_2 \ge 1$. Первое из этих двух неравенств выполняется, очевидно, при всех $a \le 1$, а для второго видим, что $1 - \sqrt{1-a} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \le 0 \Leftrightarrow a = 1$. Но при $a = 1$ имеем $t_1 = t_2 = 1$. Поскольку $|x| = \log_{12} t$, или $x = \pm \log_{12} t$, получаем

Ответ: $a \le 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \log(1 + \sqrt{1-a});\ a > 1 \Rightarrow \varnothing$.

№2. $a\lg^2(x+1) + \lg(x+1)^2 - 1 = 0$. *Решение*. ОДЗ: $x > -1$. Делая замену $t = \lg(x+1)$, исходное уравнение сводим к уравнению $at^2 + 2t - 1 = 0$. Его корни: $a = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$;

$a \ne 0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$. Для существования $t_{1,2}$ к условию $a \ne 0$ добавим условие $a \ge -1$ Таким образом, $a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{10} - 1;$

$a \ge -1$ и $a \ne 0 \Rightarrow x_{1,2} = 10^{\frac{-1 \pm \sqrt{1+a}}{a}} - 1$. Очевидно, все три найденных значения x удовлетворяют условию ОДЗ. Стало быть, *Ответ*: $a < -1 \Rightarrow \varnothing$; $a \ge -1$ и $a \ne 0 \Rightarrow x_{1,2} = 10^{\frac{-1\pm\sqrt{1+a}}{a}} - 1$; $a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{10} - 1$.

№3. $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1$ (1). *Решение*. ОДЗ: $x > -2, x \ne 0, a > 0, a \ne 1$. Ясно, что в ОДЗ имеем $(1) \Leftrightarrow \log_a(x(x+2))^2 = \log_a a \Leftrightarrow (x(x+2))^2 = a \Leftrightarrow x(x+2) = \pm\sqrt{a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x \pm \sqrt{a} = 0$. Решаем уравнение $x^2 + 2x + \sqrt{a} = 0$: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $0 < a < 1$. Легко проверить, что $x_1 > -2$, $x_1 \ne 0, x_2 > -2$ и $x_2 \ne 0$. Решаем уравнение $x^2 + 2x - \sqrt{a} = 0$: $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1+\sqrt{a}}$. Ясно, что x_3 попадает в ОДЗ при всех $a > 0$ и $a \ne 1$, но x_4, напротив, удовлетворяет условию $x > -2$ лишь при $a < 0$, что невозможно.

Ответ: $a \le 0$, $a = 1 \Rightarrow \varnothing$; $0 < a < 1 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_3 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$; $a > 1 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

№4. $\left(\dfrac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$. *Решение*. ОДЗ: $0 < a < 1$. Эти условия обеспечивают положительность оснований степеней в левой части уравнения. При решении его мы применим неожиданную тригонометрическую замену параметра a. А именно, полагаем $a = tg\alpha$. Иными словами, мы вводим новый параметр α, считая что $\alpha = arctga$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. После простых тригонометрических преобразований исходное уравнение сводится к уравнению $\sin^x 2\alpha + \cos^x 2\alpha = 1$. Условие $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ влечет ограничения $0 < \sin 2\alpha < 1$ и $0 < \cos 2\alpha < 1$. Теперь осталось заметить, что по основному тригонометрическому тождеству получаем корень $x=2$, а из указанных ограничений следует $x_1 < 2 \Rightarrow \sin^x 2\alpha > \sin^2 2\alpha$ и $\cos^{x_1} 2\alpha > \cos^2 2\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin^{x_1} 2\alpha + \cos^{x_1} 2\alpha > 1$; аналогично $x_2 > 2 \Rightarrow \sin^{x_2} 2\alpha + \cos^{x_2} 2\alpha < 1$, т.е. $x=2$ – единственный корень.

Ответ: $a \le 0, a \ge 1 \Rightarrow \varnothing$; $0 < a < 1 \Rightarrow x = 2$.

№5. $-\log_5(2-|a-x|)=\log_{0,2}(5-x)$. *Решение*. Поскольку $|a-x|=|x-a|$ и $0,2=\dfrac{1}{5}=5^{-1}$, исходное уравнение равносильно такому: $\log_5(2-|x-a|)=\log_5(5-x)$. Его ОДЗ: $|x-a|<2,\ x<5$. Потенцирование последнего уравнения дает уравнение $2-|x-a|=5-x$, равносильное уравнению $|x-a|=x-3$. Это уравнение решаем графически с учетом ОДЗ. А именно, рассмотрим функции $y=|x-a|$ и $y=x-3$. Ясно, что решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков этих функций, расположенные в части координатной плоскости, задаваемой условиями ОДЗ: $y<2, x<5$. Рассматривая эскизы указанных графиков, запишем

Ответ: $a<3,\ a\ge 7\Rightarrow\varnothing;\ a=3\Rightarrow 3\le x<5;\ 3<a<7\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\dfrac{a+3}{2}$.

Упражнения

№6. $4^x-2a(a+1)2^{x-1}+a^3=0$. №7. $2^{2x}-(2a+1)2^x+a^2+a=0$.

№8. $\log_{\sqrt{x}} a\log_{a^2}\left(\dfrac{a^2-4}{2a-x}\right)=1$. №9. $9^{\lg(x-a)-\lg 2}=3^{\lg(x-1)}$.

№10. $2\log_3 x-\log_x a=\log_{\frac{x}{3}} a$. №11. $\log_3(31-|x^2-6x+5|)=a$.

№12. $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$. №13. $\log_{\frac{1}{3}}(9^x+a)+\log_3(2\cdot 3^x)=0$.

№14. $2\log_7(ax-2)=2\log_{\sqrt{7}}(-x^2-9x-18)$.

Ответы

№6. $a<0\Rightarrow x=2\log_2(-a);\ a=0\Rightarrow\varnothing;\ a>0\Rightarrow x_1=\log_2 a$, $x_2=2\log_2 a$. №7. $a\le -1\Rightarrow\varnothing;\ -1<a\le 0\Rightarrow x=\log_2(a+1);$ $a>0\Rightarrow x_1=\log_2(a+1), x_2=\log_2 a$. №8. $a\le 0,\ a=1\Rightarrow\varnothing;\ 0<a<1,$ $1<a<2,\ a=3\Rightarrow x=a+2;\ a>2$ и $a\ne 3\Rightarrow x_{1,2}=a\pm 2$. №9. $a<0\Rightarrow\varnothing;\ 0\le a<1\Rightarrow x_{1,2}=a+2\pm\sqrt{a};\ a\ge 1\Rightarrow x=a+2\sqrt{a}$.

№10. $a \le 0 \Rightarrow \varnothing$; $a = 1 \Rightarrow x > 0,\ x \ne 1$ и $x \ne 3$; $0 < a < 1$, $a > 1 \Rightarrow x_{1,2} = 3^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$. №11. $a < 3 \Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{35 - 3^a}$; $3 \le a \le \log_3 31 \Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{35 - 3^a}$; $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{3^a - 27}$; $a > \log_3 31 \Rightarrow \varnothing$

№12. $a \le 0,\ a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}},\ a = 1 \Rightarrow \varnothing$; $a > 0,\ a \ne \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ и $a \ne 1 \Rightarrow x = a^{\log_{4a^3} 2}$.

№13. $a \le 0 \Rightarrow x = \log_3(1 + \sqrt{1-a})$; $0 < a \le 1 \Rightarrow \log_3(1 \pm \sqrt{1-a})$; $a > 1 \Rightarrow \varnothing$

№14. $a < -1,\ a \ge -\frac{1}{3} \Rightarrow \varnothing$; $-1 \le a < -\frac{2}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{a + 9 \pm \sqrt{a^2 + 18a + 17}}{-2}$; $-\frac{2}{3} \le a < -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{a + 9 + \sqrt{a^2 + 18a + 17}}{-2}$.

Урок 3. Тригонометрические уравнения

№1. $\sin x - \cos 2x = \sqrt{a} + 2$. *Решение*. ОДЗ: $a \ge 0$. Используя известную формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и делая замену $t = \sin x$, получаем уравнение $2t^2 + t - (\sqrt{a} + 3) = 0$. Решаем его: $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8\sqrt{a} + 25}}{4}$. Поскольку $8\sqrt{a} + 25 > 0$ и $t = \sin x$, необходимо на a наложить лишь ограничения $|t_1| \le 1$ и $|t_2| \le 1$. Решая неравенство $\left|\frac{-1 + \sqrt{8\sqrt{a} + 25}}{4}\right| \le 1$, получаем $a=0$. Неравенство же $\left|\frac{-1 - \sqrt{8\sqrt{a} + 25}}{4}\right| \le 1$ вообще не имеет решений. Так как при $a=0$ имеем $t_1 = 1$, осталось записать решение простейшего уравнения $\sin x = 1$ и оформить

Ответ: $a \ne 0 \Rightarrow \varnothing$; $a = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$.

№2. $(a-1)\sin^2 x + \sin x \cos x + (a+2)\cos^2 x = 0$. *Решение*. Рассматриваемое уравнение является однородным. Поэтому, готовясь делить обе его части на $\cos^2 x$, рассмотрим сначала случай $cos x=0$. Тогда $(a-1)\sin^2 x=0$, и, коль скоро $\sin^2 x \neq 0$, имеем $a=1$. Таким образом, если $a=1$, то $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi, \kappa \in Z$. Пусть теперь $\cos x \neq 0$. Делим обе части исходного уравнения на $\cos^2 x$ и вводим новую неизвестную $t=tgx$; в результате получаем уравнение $(a-1)t^2+t+(a+2)=0$. Если $a=1$, то $t=-3$ и $x=arctg(-3)+l\pi, l \in Z$. Если же $a \neq 1$, то $t_{1,2}=\dfrac{-1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2(a-1)}$; при этом необходимо потребовать, чтобы $9-4a-4a^2 \geq 0$, что равносильно двойному неравенству $-\dfrac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \dfrac{\sqrt{10}-1}{2}$. Следовательно, если $a \neq 1$ и удовлетворяет этому двойному неравенству, то $x=arctg(\dfrac{-1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2(a-1)}+m\pi, m \in Z$. В результате получаем

Ответ: $a=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,\ x=arctg(-3)+l\pi,\ \kappa, l \in Z;$

$-\dfrac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \dfrac{\sqrt{10}-1}{2}$ и $a \neq 1 \Rightarrow x=arctg(\dfrac{-1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2(a-1)})+m\pi,\ m \in Z;$

$a<-\dfrac{\sqrt{10}+1}{2},\ a>\dfrac{\sqrt{10}-1}{2} \Rightarrow \varnothing.$

№3. $\dfrac{tg(ax)}{\sin(a^2x)}=0$. *Решение*. ОДЗ: $\cos ax \neq 0, \sin a^2x \neq 0$. В ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\sin ax=0$. Следовательно, $ax=\kappa\pi, \kappa \in Z$. Равенство $a=0$ влечет $\sin a^2x=0$, что противоречит условиям ОДЗ. Значит, $a \neq 0$ и $x=\frac{\kappa\pi}{a}$. Выясним, при каких $\kappa \in Z$ и $a \neq 0$ для найденных значений x будут выполняться условия ОДЗ: $\cos ax=\cos(a \cdot \frac{\kappa\pi}{a})=\cos\kappa\pi \neq 0;$

$\sin a^2x=\sin(a^2\frac{\kappa\pi}{a})=\sin(a\kappa\pi) \Rightarrow \sin(a\kappa\pi) \neq 0 \Leftrightarrow a\kappa\pi \neq l\pi$ для любого $l \in Z \Leftrightarrow к \neq 0$ и $a \neq \frac{l}{к}$ для любых $к, l \in Z$ таких, что $k \neq 0$.

Поскольку всевозможные числа вида $\frac{l}{к}$ для указанных $к, l$ составляют множество Q рациональных чисел, записываем

Ответ: $a \in Q \Rightarrow \varnothing$; $a \notin Q \Rightarrow x = \frac{к\pi}{a}$, $к \in Z$ и $к \neq 0$.

№4. $|tgx - actgx| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. *Решение*. ОДЗ: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$. Сделав замену $t = tgx$, после очевидных преобразований приходим к уравнению $\left|\frac{t^2 - a}{t}\right| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, равносильному совокупности уравнений $\frac{t^2 - a}{t} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\frac{t^2 - a}{t} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Первое из них равносильно уравнению $3t^2 - 4\sqrt{3}t - 3a = 0$ при условии $t \neq 0$, имеющему корни $t_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 9a}}{3}$; обеспечивая существование этих корней, налагаем на параметр условие $a \geq -\frac{4}{3}$ и замечаем, что при всех таких значениях a корень t_1 не равен нулю, а для выполнения условия $t_2 \neq 0$ нужно потребовать еще, чтобы $a \neq 0$. Итак, если $a \geq -\frac{4}{3}$ и $a \neq 0$, то $x = arctg\frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 9a}}{3} + к\pi$; если же $a = 0$, то $tgx = 0$, т.е. $\sin x = 0$, чего быть не может по ОДЗ. Второе из указанных уравнений равносильно при $t \neq 0$ уравнению $3t^2 + 4\sqrt{3}t - 3a = 0$, имеющему корни $t_{3,4} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 9a}}{3}$. Здесь опять требуем, чтобы $a \geq -\frac{4}{3}$, и замечаем, что $t_4 = \frac{-2\sqrt{3} - \sqrt{12 - 9a}}{3} \neq 0$ при любом $a \geq -\frac{4}{3}$, а $t_3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Суммируя полученную информацию, получаем

Ответ: $a<-\frac{4}{3}\Rightarrow\varnothing; a\ge-\frac{4}{3}$ и $a\ne 0\Rightarrow x=arctg\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+9a}}{3}+\kappa\pi$,

$x = arctg\,\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+9a}}{3}$, $\kappa, l\in Z; a=0\Rightarrow x=arctg(\frac{\pm4\sqrt{3}}{3})+m\pi$, $m\in Z$.

Упражнения

№5. $(a-1)\cos x+(a+1)\sin x=2a$.. №6. $\frac{a}{a-3\sin^2 2x}=3$.

№7. $\sin^4 x-\cos^4 x=a(\sin^8 x-\cos^8 x)$. №8. $x\sin ax=|x|$.

№9. $lg^2\sin x-2a\,lg\sin x+2=a^2$. №10. $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}+\frac{2-\sin x}{\sin x-3}+a=0$.

№11. $(8a^2+1)\sin^3 x-(4a^2+1)\sin x+2a\cos^3 x=0$.

Ответы

№5. $|a|>1\Rightarrow\varnothing$; $|a|\le1$ и $a\ne\frac{1}{3}\Rightarrow x=2arctg\frac{a+1\pm\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}+2\kappa\pi$, $\kappa\in Z$; $a=\frac{1}{3}\Rightarrow x=(2l+1)\pi$, $x=2arctg\,\frac{1}{2}+2m\pi$, $l,m\in Z$. №6. $a\le0$, $a>\frac{9}{2}\Rightarrow\varnothing$; $0<a\le\frac{9}{2}\Rightarrow x=\pm arcsin\frac{\sqrt{2a}}{3}+\frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa\in Z$. №7. $a<1$, $a>2\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa\in Z$; $1\le a\le2\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2}$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{4-3a}{a}+\frac{m\pi}{2}$, $l,m\in Z$. №8. $a<0\Rightarrow x=0$, $x=\frac{(4k+1)\pi}{2a}$, $x=\frac{(4l-1)\pi}{2a}$, $k\in\{-1,-2,\dots\}$, $l\in\{1,2,\dots\}$; $a=0\Rightarrow x=0$; $a>0\Rightarrow x=0$, $x=\frac{(4m+1)\pi}{2a}$, $x=\frac{(4n-1)\pi}{2a}$, $m\in\{0,1,2,\dots\}$, $n\in\{0,-1,-2,\dots\}$. №9. $|a|\ge\sqrt{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=(-1)^\kappa arcsin(10^{a-\sqrt{2a^2-2}})+\kappa\pi$, $\kappa\in Z$; $-\sqrt{2}<a\le1\Rightarrow$ $\Rightarrow x=(-1)^\kappa arcsin(10^{a\pm\sqrt{2a^2-2}})+l\pi$, $l\in Z$; $-1<a<\sqrt{2}\Rightarrow\varnothing$.

№10. $a<\frac{1}{12}$, $a>\frac{1}{2}\Rightarrow\varnothing$; $\frac{1}{12}\le a\le\frac{1}{2}\Rightarrow x=(-1)^\kappa arcsin\frac{5-\sqrt{1+\frac{4}{a}}}{2}+\kappa\pi$, $\kappa\in Z$.

№11. $a \neq 0 \Rightarrow x = arctg\,\frac{1}{2a} + \kappa\pi,\ x = arctg(\frac{-1 \pm \sqrt{1+16a^2}}{4a}) + l\pi,$

$\kappa, l \in Z;\ a = 0 \Rightarrow x = \frac{m\pi}{2},\ m \in Z.$

Задание 1.2. НАЙТИ значения параметров при данных условиях на корни

Урок 4. Алгебраические уравнения

Найти все значения параметра a, при которых уравнение

№1. $x^2 + ax - 1 = 0$ таково, что все его корни лежат на луче $(-\infty;3)$. *Решение*. Находим корни: $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$. Ясно, что оба корня существуют при любом a, поскольку $a^2 + 4 > 0$ и при этом $x_2 \leq x_1$. Поэтому искомые значения a составляют множество решений неравенства $\frac{-a + \sqrt{a^2+4}}{2} < 3$, решая которое легко получаем

Ответ: $a > -\frac{8}{3}$.

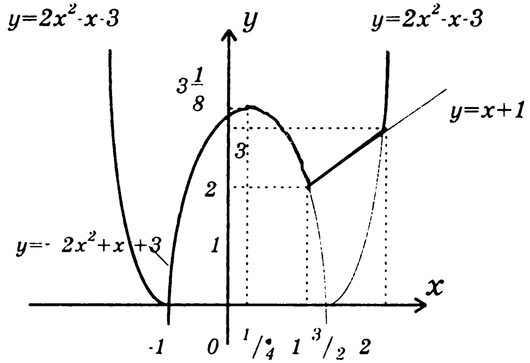
№2. $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ имеет наибольшую сумму квадратов корней. *Решение*. Если x_1, x_2 – корни данного уравнения, то, согласно формулам Виета, $x_1 + x_2 = -2a$, $x_1x_2 = 2a^2 + 4a + 3$. Отсюда находим сумму квадратов этих корней методом дополнения до полного квадрата суммы: $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - 2(2a^2 + 4a + 3)$, т.е. $x_1^2 + x_2^2 = -8a - 6$. Вспомним теперь, что существование x_1, x_2 обеспечивает неотрицательность дискриминанта исходного уравнения, поэтому параметр a обязан удовлетворять неравенству $4a^2 - 8a^2 - 16a - 12 \geq 0$, решая которое получаем $-3 \leq a \leq -1$. Очевидно, величина $-8a - 6$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-3;-1]$ при $a = -3$.

Ответ: $a = -3$.

№3. $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-x-2\right|-x-a=0$ имеет три различных корня. *Решение.* Переписав уравнение в виде $\left|x^2-1\right|+$ $+\left|x^2-x-2\right|=x+a$ и рассмотрев пару функций $f(x)=\left|x^2-1\right|+$ $+\left|x^2-x-2\right|$, $g(x)=x+a$, замечаем, что искомые значения параметра a и только они будут соответствовать тем положениям графика функции $g(x)$, при которых он имеет точно три точки пересечения с графиком функции $f(x)$. Построим график функции $y=f(x)$. Для этого представим ее в виде $y=|x-1||x+1|+|x+1||x-2|$ и, рассмотрев четыре возникающих случая, запишем эту функцию в виде

$$y=\begin{cases}2x^2-x-3, & \text{если} \quad x\le -1 \quad \text{или} \quad x\ge 2,\\ -2x^2+x+3, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ x+1, & \text{если} \quad 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Теперь ясно, что эскиз ее графика будет выглядеть следующим образом:



Поскольку график функции $y=x+a$ – это прямая, имеющая угол наклона к оси Ox, равный $\frac{\pi}{4}$, и пересекающая ось Oy в точке с координатами $(0,a)$, заключаем, что три указанные точки пересечения мы получим лишь в случае, когда эта прямая касается графика функции $h(x)=-2x^2+x+3$. Поэтому поступаем так: $h(x)' = -4x + 1$, $-4x + 1 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow h(0) = 3 \Rightarrow a = 3$.

Ответ: $a=3$.

№4. $\left|x^2 - 1\right| - x - a = 0$ имеет максимальное количество неположительных целочисленных корней. *Решение*. Применим геометрический метод: число x_0 будет корнем исходного уравнения при данном значении параметра a тогда и только тогда, когда x_0 – абсцисса точки пересечения графиков функций $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ и $g(x) = x + a$; график функции $y=f(x)$ получается из параболы $y = x^2 - 1$ симметрией ее части, лежащей ниже оси Ox относительно Ox, а график функции $y=g(x)$ – прямая с углом наклона к оси Ox, равным $\frac{\pi}{4}$, и пересекающая ось Oy в точке с координатами $(0, a)$. Теперь, сделав чертеж, нетрудно получить

Ответ: $a=1$.

№5. $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет 0,1,2,... корней. *Решение*. Как и выше, применим геометрический метод, рассмотрев функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = x + a$. График первой из них – верхняя половина параболы с осью Ox в качестве оси симметрии, с вершиной в точке с абсциссой -1 и с ветвями вправо, а график второй тот же, что и в задаче №5. Нарисовав чертеж и заставляя a изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, видим, что если $a < 1$, то будет одна точка пересечения графиков и, значит, будет один корень; если $1 \le a < a_0$, где $a_0 = f(x_0) - x_0$ и x_0 – абсцисса точки касания прямой $y=g(x)$ с кривой $y=f(x)$, то будет два корня; если $a = a_0$, то будет один корень, и, наконец, если $a > a_0$, то будет 0 корней. Находим x_0 и a_0: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}} = 1$ (т.к. 1 – угловой коэффициент прямой $y=g(x)$) $\Rightarrow x_0 = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow f(x_0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_0 = \dfrac{5}{4}$.

Ответ: $a<1,\ a=\frac{5}{4} \Rightarrow 1$ корень; $1 \le a < \frac{5}{4} \Rightarrow 2$ корня; $a>\frac{5}{4} \Rightarrow 0$ корней.

Упражнения

Найти все значения параметров, при которых уравнение

№6. $x^2+ax+1=0$ имеет хотя бы один общий корень с уравнением $x^2+x+a=0$. №7. $|x^2-1|+|x^2-x-2|-a=0$ имеет 0,1,2,... корней. №8. $\sqrt{2|x|-x^2}=a$ имеет 0,1,2,... корней. №9. $x^3-5x^2+7x=a$ таково, что хотя бы два его различных корня будут корнями уравнения $x^3-8x+b=0$. №10. $y=ax^2+x+1$ задает такую функцию, что ее область значений включает отрезок $[-1;1]$.

Ответы

№6. $a=-2$. №7. $a<0 \Rightarrow 0$ корней; $a=0 \Rightarrow 1$ корень; $0<a<2,\quad a>3\frac{1}{8} \Rightarrow 2$ корня; $a=3\frac{1}{8} \Rightarrow 3$ корня; $2 \le a < 3\frac{1}{8} \Rightarrow 4$ корня. №8. $a<0,\ a>1 \Rightarrow 0$ корней; $a=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3$ корня; $0<a<1 \Rightarrow 4$ корня; $a=1 \Rightarrow 2$ корня. №9. $a=6$, $b=4$. №10. $a \le \frac{1}{8}$.

Урок 5. Показательные и логарифмические уравнения

Найти все значения параметров, при которых уравнение

№1. $log_2(4^x-a)=x$ (1) имеет единственный корень. *Решение*. ОДЗ: $4^x-a>0$. Поскольку потенцируя данное уравнение, получаем $4^x-a=2^x$ (2) и $2^x>0$ для любого x, видим, что условие ОДЗ выполняется автоматически, т.е. уравнения (1) и (2) равносильны. Поэтому находим значения a, при которых уравнение (2) имеет единственный корень: $(2)\Leftrightarrow(2^x)^2-2^x-a=0\Leftrightarrow 2^x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\ 2^x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Нетрудно понять, что искомые a удовлетворяют либо уравнению $1+4a=0$, либо системе $\{1+\sqrt{1+4a}>0,\ 1-\sqrt{1+4a}\le 0$. В результате получаем

Ответ: $a=-\frac{1}{4},\ a\ge 0$.

№2. $(1+\log_5 x)(4\log_5 x+(a-3)\log_x 5-2|a|+4)=0$ равносильно уравнению $\log_x(5x^2)\log_5^2 x=1$. *Решение.* Поскольку $\log_x(5x^2)=\frac{1}{\log_5 x}+2$, в обоих уравнениях делаем замену $t=\log_5 x$ и, считая $t\ne 0$, заключаем, что мы получим ответ, если найдем все те значения a, при которых уравнения $(1+t)(4t+\frac{(a-3)}{t}-2|a|+4)=0$ (1), $\left(\frac{1}{t}+2\right)t^2=1$ (2) равносильны. Решая второе из них, находим $t_2=\frac{1}{2}$. Ясно, что -1 является корнем уравнения (1) при любом a. Подставляя в него $\frac{1}{2}$ вместо t, получаем после простых преобразований $|a|=a$, т.е. $a\ge 0$. Итак, множество $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ всех решений уравнения (2) включается в множество всех решений уравнения (1) при $a\ge 0$. Теперь решим (1) при условии $a\ge 0$ и наложением дополнительных ограничений на a добьемся, чтобы уравнение (1) не имело корней, кроме -1 и $\frac{1}{2}$:

$(1+t)(4t+\frac{a-3}{t}-2a+4)=0\Leftrightarrow t=-1$ или $4t^2-2(a-2)t+a-3=0$ и $t\ne 0$. Корни последнего квадратного уравнения $t_{1,2}=\frac{a-2\pm\sqrt{(a-4)^2}}{4}=\frac{a-2\pm(a-4)}{4}$, т.е. $t_1=\frac{a-3}{2}, t_2=\frac{1}{2}$.

Таким образом, $\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{a-3}{2}\right\}$ – множество всех корней уравнения (1) при $a \geq 0$. Стало быть, искомые значения a будут корнями уравнений $\frac{a-3}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{a-3}{2} = 0$. Отсюда получаем

Ответ: $a = 1$, $a = 4$, $a = 3$.

№3. $4^{-|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a| + 2) = 0$

имеет три различных корня. *Решение*. Легко привести исходное уравнение к уравнению $2^{-2|x-a|+1} \cdot \log_3(x^2 - 2x + 3) - 2^{-x^2+2x} \cdot \log_3(2|x-a| + 2) = 0$, которое после перенесения вычитаемого в правую часть и умножения обеих частей полученного уравнения на 2^{x^2-2x+3} $2^{2|x-a|+2}$ приводится к равносильному уравнению $2^{x^2-2x+3} \cdot \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|+2} \cdot \log_3(2|x-a| + 2)$. Левая и правая части этого уравнения имеют вид $2^t \log_3 t$, и при этом $t \geq 2$. Рассмотрев функцию $f(t) = 2^t \log_3 t$ и вычислив ее производную $f'(t) = \frac{2^t}{t \ln 3}(t \ \ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \log_3 t + 1)$, видим, что $f'(t) > 0$ для любого $t \geq 2$. Это значит, что $f(t)$ на луче $[2;+\infty)$ строго возрастает. Отсюда следует, что функция $f(t)$ на этом луче взаимно однозначна, т.е. обладает свойством $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$ для любых $t_1, t_2 \in [2;+\infty)$. Полагая теперь $t_1 = x^2 - 2x + 3, t_2 = 2|x-a| + 2$, заключаем, что исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 2x + 3 = 2|x-a| + 2$, или уравнению $(x-1)^2 = 2|x-a|$. Применяя к последнему уравнению геометрический метод, т.е. исследуя точки пересечения параболы $y = (x-1)^2$ и ломаной $y = 2|x-a|$, легко получаем

Ответ: $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = \frac{3}{2}$.

№4. $2\log_a|x-1| - \log_a x = 1$ (1) таково, что сумма квадратов его корней равна 34. *Решение*. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$,

$a > 0, a \neq 1$. Легко понять, что в ОДЗ наше уравнение можно преобразовать так: (1) $\Leftrightarrow log_a(x-1)^2 - log_a x = 1 \Leftrightarrow log_a \dfrac{(x-1)^2}{x} =$

$= log_a a \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x} = a \Leftrightarrow (x-1)^2 = ax \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 1 = 0.$

Нетрудно проверить, что корни этого уравнения $x_{1,2} = \dfrac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2}$, в силу условия $a>0$, положительны и отличны от 1, т.е. входят в ОДЗ. Поэтому $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a+2)^2 - 2$, т.е. $(a+2)^2 - 2 = 34$ для любого a из ОДЗ. Решая это квадратное относительно a уравнение и опять учитывая, что $a>0$, получаем

Ответ: $a=4$.

№5. $\sqrt[4]{x+a} + log_5(x-5a) = 0$ имеет $0, 1, 2, \ldots$ корней.

Решение. Применяем геометрический метод: фиксируя значение a, рисуем эскизы графиков функций $f(x) = log_5(x-5a)$ и $g(x) = -\sqrt[4]{x+a}$. Первый получается из графика функции $y = log_5 x$ параллельным сдвигом вдоль оси Ox так, чтобы точка пересечения графика с Ox имела абсциссу $1+5a$; второй же по форме похож на нижнюю часть параболы с осью Ox в качестве оси симметрии и с вершиной в точке с абсциссой $-a$; ясно теперь, что графики пересекаются, причем лишь в одной точке, тогда и только тогда, когда $-a \leq 1 + 5a$, т.е. когда $a \geq -\dfrac{1}{16}$. В результате получаем

Ответ: $a < -\dfrac{1}{16} \Rightarrow 0$ корней; $a \geq -\dfrac{1}{16} \Rightarrow 1$ корень.

Упражнения

Найти все значения параметров, при которых уравнение

№6. $\dfrac{lg ax}{lg(x+1)} = 2$ имеет единственный корень. №7. $log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2 \, log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$ имеет единственный корень.

№8. $2 \, lg(x+3) = lg(ax)$ имеет единственный корень.

№9. $\log_2(4^x + 7a^5) = x$ имеет два различных корня.

№10. $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два различных корня.

№11. $\log_{x^2+a+1}(ax^2 + 2) = 2\log_{7+2a}(5 - \sqrt{6-2a})$ выполняется при всех x.

Ответы

№6. $a<0, a=4$. №7. $2<a<\frac{7}{3}$, $\frac{7}{3}<a<3$, $a=\frac{7}{2}$. №8. $a<0, a=12$.

№9. $0<a<\frac{1}{\sqrt[5]{28}}$. №10. $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$. №11. $a=1$.

Урок 6. Тригонометрические уравнения

Найти все значения параметров, при которых уравнение

№1. $\sin^2 x + a\sin x - a^2 + 1 = 0$ имеет корни. *Решение*. Замена $t=\sin x$ приводит к уравнению $t^2 + at - a^2 + 1 = 0$, корни которого $t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2-4}}{2}$; их существование обеспечивается условием $5a^2 - 4 \geq 0$, равносильным неравенству $|a| \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$; теперь, помня о том, что $t=\sin x$ и $|\sin x| \leq 1$, заключаем, что искомые a составляют множество решений совокупности двух систем $\left[\begin{cases} |a| \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \left|\frac{-a+\sqrt{5a^2-4}}{2}\right| \leq 1; \end{cases}\right.$ $\begin{cases} |a| \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \left|\frac{-1-\sqrt{5a^2-4}}{2}\right| \leq 1. \end{cases}$ Решая эти системы, получаем

Ответ: $-2 \leq a \leq -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq a \leq 2$.

№2. $(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)\cdot(1 + \sin x) + a + 3 = 0$ не имеет корней. *Решение*. Поскольку

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, делая замену $t = 1 + \sin x$, приводим уравнение к виду $(a-3)^2 t^2 - 2(a-3)^2 t + a + 3 = 0$. Ясно, что если $a=3$, то последнее уравнение, а вместе с ним и исходное, не имеет корней. Пусть $a \neq 3$; тогда

$$t_{1,2} = \frac{(a-3)^2 \pm \sqrt{(a-3)^4 - (a-3)^2(a+3)}}{(a-3)^2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{a+3}{(a-3)^2}}.$$

Теперь легко понять, что искомые значения параметра $a \neq 3$ составят множество решений совокупности неравенств $1 - \frac{a+3}{(a-3)^2} < 0$, $\sqrt{1 - \frac{a+3}{(a-3)^2}} > 1$. Решая эти неравенства, получаем

Ответ: $a<-3$, $1<a<6$.

№3. $\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно 3 корня. *Решение*. Рассматривая абсциссы точек пересечения части синусоиды $y=\sin x$ на отрезке $0 \le x \le 2\pi$ с парой прямых $y=t_1, y=t_2$, легко приходим к заключению, что три такие точки с разными абсциссами мы получим разве лишь в следующих пяти случаях: (а) $t_1 = t_2 = 0$, (б) $t_1 = 0$, $|t_2| > 1$, (в) $t_2 = 0$, $|t_1| > 1$, (г) $|t_1| = 1$, $0 \neq |t_2| < 1$, (д) $|t_2| = 1$, $0 \neq |t_1| < 1$. Теперь, делая замену $t=\sin x$ в исходном уравнении, находим корни получающегося квадратного уравнения $t_{1,2} = \frac{-(a-2)^2 \pm \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)}}{2}$ и, рассматривая для них указанные пять случаев, находим искомые значения a: (а) $t_1 = t_2 = 0 \Rightarrow a = 2$; (б) $t_1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a=0,\ a=2,\ a=3;$ если $a = 2$, то имеем первый случай; если $a=0$, то $t_2 = -4$; если $a=3$, то $t_2 = -1$; таким образом, здесь мы получили значение $a=0$; (в) $t_2 = 0 \Rightarrow a = 2$, т.е. этот случай совпадает с первым случаем; (г) $|t_1| = 1$, $0 \neq |t_2| < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{-(a-2)^2 + \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)}}{2}\right| = 1,\ 0 \neq \left|\frac{-(a-2)^2 - \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)}}{2}\right| < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left|(a-2)^2 - \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)}\right| = 2$ (1), $\left|(a-2)^2 + \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)}\right| < 2$ (2); нетрудно понять, что, в силу неотрицательности величин $(a-2)^2$ и $\sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)}$, из равенства (1) следует неравенство, противоположное (2), т.е. значений a, для которых выполняется рассматриваемый случай, не существует; (д) $|t_2| = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)} = 2 \Rightarrow \sqrt{(a-2)^4 - 4a(a-2)(a-3)} = 2-(a-2)^2 \Rightarrow (a-2)^4 + 4(a^2-2a)(3-a) = 4-4(a-2)^2+(a-2)^4 \Rightarrow (a^2-2a)(3-a) = 1-(a-2)^2 \Rightarrow a^3-6a^2+10a-3=0$ (3); подбором находим первый корень $a_1 = 3$; делим "уголком" многочлен $a^3-6a^2+10a-3$ на двучлен $a-3$ и получаем равенство $a^3-6a^2+10a-3 = (a-3)(a^2-3a+1)$; значит, $a_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ – оставшиеся корни уравнения (3); выше замечалось, что $a=3$ нам не годится; непосредственными вычислениями доказывается, что значение t_1 при $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ меньше 1 и не равно 0, а при $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ это значение по модулю больше 1; значит, в этом последнем случае мы нашли еще одно требуемое значение $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $a=0$, $a=2$, $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

№4. $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень . *Решение*. Если $a=0$, то $x=0$, т.е. при $a=0$ имеем единственный корень. Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $\sin(\cos x) = \dfrac{x^2+a^2}{2a}$. Применяем геометрический метод: рассмотрим эскизы графиков функций

$f(x) = sin(cos\,x)$ и $g(x) = \dfrac{x^2 + a^2}{2a}$. Легко понять, что функция $y=f(x)$ четная, периодическая с периодом 2π, пересекает ось Oy в точке с ординатой $sin1$, а ось Ox в точках с абсциссами $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z;$ кроме того, поскольку $f'(x) = -cos(cos\,x) \cdot sin\,x$, имеем $f'(-\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} cos\dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$, $f'(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} cos\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0$, т.е. точка с координатами $(0, sin1)$ – точка максимума функции $y=f(x)$. Функция $y=g(x)$ имеет в качестве графика параболу с осью симметрии Ox и с вершиной в точке с ординатой $\dfrac{a}{2}$. Ясно теперь, что при $a \neq 0$ исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда вершина параболы имеет ординату $sin1$. Отсюда $\dfrac{a}{2} = sin\,1$, т.е. $a = 2\,sin\,1$.

Ответ: $a = 0, a = 2\,sin\,1$.

Упражнения

Найти все значения параметров, при которых уравнение №5. $1 + sin^2 ax = cos\,x$ имеет единственный корень. №6. $sin^2 4x + (a^2 - 3) sin\,4x + a^2 - 4 = 0$ имеет 4 корня на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. №7. $cos\sqrt{a - x^2} = 1$ имеет 8 корней. №8. $\sqrt{a + \sqrt{a + sin\,x}} = sin\,x$ имеет корни. №9. $(x^2 + cos\dfrac{11\pi x}{4} - a)\sqrt{8 - ax} = 0$ имеет на отрезке $[-2;3$ нечетное число различных корней. №10. $4\,cos^2 x = a^2 - 6$ равносильно уравнению $1 - cos\,2x = \dfrac{a}{6}$.

Ответы

№5. $a \notin Q$. №6. $a = \pm 2$. №7. $36\pi^2 < a < 64\pi^2$. №8. $-\dfrac{1}{4} \leq a \leq 0$. №9. $a \leq -4$, $a = 1$, $\dfrac{8}{3} \leq a < 4$, $a > 4$. №10. $a < -\sqrt{10}$, $\sqrt{6} < a < 0$, $a = 3$, $a > 12$.

ТЕМА 2. НЕРАВЕНСТВА

Задание 2.1. РЕШИТЬ в зависимости от значений параметров

Урок 7. Алгебраические неравенства

№1. $(1-a^2)x^2+2ax+1\ge 0$ (1). *Решение.* Поскольку коэффициент при x^2 зависит от a, а решение неравенства зависит от этого коэффициента, рассмотрим три случая: (а) $1-a^2=0$, (б) $1-a^2>0$, (в) $1-a^2<0$. Оформляя их рассмотрение, условия случаев записываем в разрешенном относительно a виде: (а) $|a|=1\Rightarrow$ если $a=1$, то $2x+1\ge 0$, т.е. $x\ge -\frac{1}{2}$; если $a=-1$, то $-2x+1\ge 0$, т.е. $x\le \frac{1}{2}$. (б) $|a|<1\Rightarrow$ график левой части неравенства (1) – это парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$ если дискриминант D квадратного трехчлена из левой части (1) меньше нуля, то решением (1) является любое $x\in R$; если же $D\ge 0$ и $x_1\ge x_2$ – корни левой части (1), то решение (1) – это объединение $(-\infty;x_2]\cup[x_1;+\infty)$; поскольку коэффициент при x имеет вид $2a$, удобнее вместо D рассматривать $\frac{D}{4}$; отсюда получаем: $\frac{D}{4}=2a^2-1$, $x_{1,2}=$ $=\frac{-a\pm\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}$, $\frac{D}{4}<0\Leftrightarrow |a|<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{D}{4}\ge 0\Leftrightarrow |a|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в ответ пойдут следующие две строчки: $|a|<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x\in R$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\le|a|<1\Rightarrow x\le x_2$, $x\ge x_1$; (в) $|a|>1\Rightarrow\frac{D}{4}>0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-a\mp\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}$, $x_2\le x\le x_1$.

Ответ: $|a|>1\Rightarrow\frac{-a+\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}\le x\le\frac{-a-\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}$; $a=-1\Rightarrow x\le\frac{1}{2}$;

$a=1\Rightarrow x\ge -\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\le|a|<1\Rightarrow x\le\frac{-a-\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}$,

$$x \geq \frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}; \quad |a| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in R.$$

№2. $ax^3 > -\frac{1}{x}$. *Решение*. Решая неравенство как рациональное, сводим его к равносильному неравенству $\frac{ax^4 + 1}{x} > 0$. Если $a \geq 0$, то $ax^4 + 1 > 0$, и, поскольку дробь с положительным числителем положительна лишь с положительным знаменателем, получаем $x>0$. Если же $a < 0$, то $-a < 0$, и, введя для удобства обозначение $a = -b^4$, т.е. $b = \sqrt[4]{-a}$, наше неравенство легко преобразовать к виду $\frac{-b^2(x - \frac{1}{b})(x + \frac{1}{b})(1 + (bx)^2)}{x} > 0$. После деления обеих частей последнего неравенства на $-b^2(1 + (bx)^2)$, т.е. на отрицательную независимо от x величину, приходим к равносильному неравенству $\frac{(1 - \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{b})}{x} < 0$. Применяя метод интервалов и заменяя b на $\sqrt[4]{-a}$, получаем

Ответ: $a < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[4]{-a}}$, $0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{-a}}$; $a \geq 0 \Rightarrow x > 0$.

№3. $|x + 2| - |2x + 8| \geq a$ (1). *Решение* разобьем на три случая, в каждом из которых известен знак каждого подмодульного выражения: (а) $x \leq -4 \Rightarrow$ (1) равносильно неравенству $-x - 2 + 2x + 8 \geq a$, т.е. неравенству $x \geq a - 6$; с учетом условия случая имеем $a - 6 \leq x \leq -4$, откуда $a - 6 \leq -4$, т.е. $a \leq 2$; значит, если $a \leq 2$, то $a - 6 \leq x \leq -4$; (б) $-4 < x \leq -2 \Rightarrow (1)$ равносильно неравенству $-x - 2 - 2x - 8 \geq a$, т.е. неравенству $x \leq -\frac{a + 10}{3}$; согласуя это неравенство с условием случая, получаем $a \geq 2 \Rightarrow \varnothing$; $-4 \leq a < 2 \Rightarrow -4 < x \leq -\frac{a+10}{3}$; $a < -4 \Rightarrow -4 < x \leq -2$; (в) $x > -2 \Rightarrow$ (1) равносильно неравенству $x + 2 - 2x - 8 \geq a$, т.е. неравенству $x \leq -a - 6$; учитывая условие случая, имеем $-2 < x \leq -a - 6$, откуда $-2 < -a - 6$, т.е. $a < -4 \Rightarrow -2 < x \leq -a - 6$.

Для записи ответа представим найденные зависимости x от a в следующем виде: $a < -4 \Rightarrow a-6 \le x \le -4,\ -4 < x \le -2,\ -2 < x \le -a-6;\ -4 \le a \le 2 \Rightarrow a-6 \le x \le -4,\ -4 < x \le -\frac{a+10}{3};\ a > 2 \Rightarrow \varnothing$. Теперь ясно, что

Ответ: $a<-4 \Rightarrow a-6 \le x \le -a-6;\ -4 \le a \le 2 \Rightarrow a-6 \le x \le -\frac{a+10}{3};$ $a > 2 \Rightarrow \varnothing.$

№4. $\sqrt{ax} \ge x+1$ (1). *Решение*. ОДЗ: $ax \ge 0$. Удобно, используя ОДЗ, рассмотреть два случая: (а) $x \ge 0 \Rightarrow a \ge 0$ по ОДЗ $\Rightarrow$ (1) равносильно квадратному относительно $\sqrt{x}$ неравенству $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{a}\sqrt{x} + 1 \le 0;$ корни его левой части $(\sqrt{x})_{1,2} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-4}}{2}$ существуют при $a \ge 4$ и оба положительны; стало быть, в этом случае $a \ge 4 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-4}}{2}\right)^2 \le x \le \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-4}}{2}\right)^2;$ (б) $x < 0 \Rightarrow a \le 0$ по ОДЗ $\Rightarrow$ (1) равносильно квадратному относительно $\sqrt{-x}$ неравенству $(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{-a}\sqrt{-x} - 1 \ge 0;$ корни его левой части $(\sqrt{-x})_{1,2} = \frac{\sqrt{-a} \pm \sqrt{-a+4}}{2}$ существуют для всех $a \le 0$, при этом $(\sqrt{-x})_2 < 0$ и, следовательно, $\sqrt{-x} \ge (\sqrt{-x})_1$, т.е. $\sqrt{-x} \ge \frac{\sqrt{4-a}-\sqrt{-a}}{2};$ поскольку очевидно $\frac{\sqrt{4-a}-\sqrt{-a}}{2} > 0$ при $a \le 0$, заключаем, что $a \le 0 \Rightarrow x \le -\left(\frac{\sqrt{4-a}-\sqrt{-a}}{2}\right)^2$.

Ответ: $a \le 0 \Rightarrow x \le -\left(\frac{\sqrt{4-a}-\sqrt{-a}}{2}\right)^2;\ 0 < a < 4 \Rightarrow \varnothing;\ a \ge 4 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-4}}{2}\right)^2 \le x \le \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-4}}{2}\right)^2.$

№5. $2|x-a|<2ax-x^2-2$. *Решение.* Неравенство можно решить аналитически, но это довольно трудоемко. Поэтому применим геометрический метод: рассмотрим функции $f(x)=2|x-a|$, $g(x)=2ax-x^2-2$; тогда при фиксированном значении параметра a_0 значение неизвестной x_0 будет решением исходного неравенства тогда и только тогда, когда x_0 – абсцисса точки графика функции $y=f(x)$, лежащей ниже точки графика функции $y=g(x)$ с той же абсциссой x_0, т.е. точка $A(x_0,f(x_0))$ лежит ниже точки $B(x_0,g(x_0))$. Графиком первой функции является ломаная, составленная из двух лучей, исходящих вверх из точки с координатами $(a,0)$ под углом $arctg2$, и соответственно $\pi-arctg2$. Графиком функции $y=g(x)$ служит парабола с ветвями вниз и вершиной в точке с координатами (a,a^2-2). Отсюда сразу ясно, что при $a^2-2\le 0$ решений нет, а при $a^2-2>0$ будем иметь $x_1<x<x_2$, где x_1,x_2 – абсциссы точек пересечения графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Очевидно, в качестве x_2 нужно взять больший корень уравнения $2(x-a)=2ax-x^2-2$, а в качестве x_1 величину $a-(x_2-a)$. Поэтому $x_1=a-1+\sqrt{a^2-1}$, $x_2=a+1-\sqrt{a^2-1}$. Учитывая сказанное, запишем

Ответ: $|a|\le\sqrt{2}\Rightarrow\varnothing$; $|a|>\sqrt{2}\Rightarrow a+1-\sqrt{a^2-1}\le x\le a-1+\sqrt{a^2-1}$.

Упражнения

№6. $x^2+ax+1>0$. №7. $\dfrac{ax-1}{x-a}>1$. №8. $ax>\dfrac{1}{x}$. №9. $|1-|x||<a-x$.

№10. $\sqrt{x^2+x}<a-x$ №11. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}<a$. №12. $5\sqrt{ax}<x+4a$.

№13. $\sqrt{a^2-x^2}+a+1<3x$.

Ответы

№6. $|a|>2\Rightarrow x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$;

$a=-2\Rightarrow x\ne 1$; $|a|<2\Rightarrow x\in R$; $a=2\Rightarrow x\ne -1$.

№7. $a<-1 \Rightarrow a<x<-1$; $|a|=1 \Rightarrow \varnothing$; $|a|<1 \Rightarrow -1<x<a$; $a>1 \Rightarrow x<-1,\ x>a$.

№8. $x \le 0 \Rightarrow x<0$; $a>0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{a}}<x<0,\ x>\frac{1}{\sqrt{a}}$. №9. $a \le -1 \Rightarrow \varnothing$; $-1<a \le 1 \Rightarrow x<\frac{a-1}{2}$; $a>1 \Rightarrow x<\frac{a+1}{2}$. №10. $a \le -1 \Rightarrow \varnothing$; $-1<a<-\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{a^2}{2a+1}<x \le -1$; $-\frac{1}{2} \le a \le 0 \Rightarrow x \le -1$; $a>0 \Rightarrow x \le -1,\ 0 \le x<\frac{a^2}{2a+1}$.

№11. $a \le 2 \Rightarrow \varnothing$; $2<a \le 4 \Rightarrow -a \le x<\frac{-a\sqrt{4a-a^2}}{2}$, $\frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2}<x \le a$; $a>4 \Rightarrow |x| \le a$. №12. $a<0 \Rightarrow \varnothing$; $a=0 \Rightarrow x>0$; $a>0 \Rightarrow 0 \le x<a,\ x>16a$.

№13. $a<-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3a+3+\sqrt{9a^2-2a-1}}{10}<x \le -a$; $a \ge -\frac{1}{4} \Rightarrow \varnothing$.

Урок 8. Показательные и логарифмические неравенства

№1. $a^{x+2}+8a^{x-1}-\frac{4}{a}>a-2$. *Решение*. ОДЗ: $a>0$.
Очевидно, если $a=1$, то x – любое число. Пусть поэтому $a \ne 1$. Умножая на a обе части неравенства и перенося все налево, получим неравенство $a^{x+3}+8a^x-a^2+2a-4>0$ (1), равносильное в ОДЗ исходному. Решаем его: $(1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^x(a^3+8)-(a^2-2a+4)>0 \Leftrightarrow a^x(a+2)(a^2-2a+4)-$ $-(a^2-2a+4)>0 \Leftrightarrow (a^2-2a+4)(a^x(a+2)-1)>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^x(a+2)-1>0$ (т.к. $a^2-2a+4>0$ для всех a) $\Leftrightarrow a^x>\frac{1}{a+2}$ (т.к. $a+2>0$); ясно, что если $0<a<1$, то, логарифмируя последнее неравенство по основанию a, получим $x<-\log_a(a+2)$; аналогично $a>1 \Rightarrow x>-\log_a(a+2)$.

Ответ: $a \le 0 \Rightarrow \varnothing$; $0<a<1 \Rightarrow x<-\log_a(a+2)$; $a=1 \Rightarrow x \in R$; $a>1 \Rightarrow x>-\log_a(a+2)$.

№2. $\frac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$. *Решение*. ОДЗ: $x>0,\ a>0,\ a \ne 1$.
Сделаем для удобства записи замену $t=\log_a x$ и, в силу того,

что $t^2+2>0$, получим неравенство $t^2-3t-4<0$, равносильное в ОДЗ с учетом замены исходному. Отсюда $t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}$; $t_1=4$, $t_2=-1$; $-1<t<4$; $-1<\log_a x<4$; $\log_a a^{-1}<\log_a x<\log_a a^4$. Рассматривая случаи $0<a<1$ и $a>1$ и потенцируя последнее двойное неравенство, получим

Ответ: $a\le0,\ a=1\Rightarrow\varnothing;\ 0<a<1\Rightarrow a^4<x<a^{-1};$ $a>1\Rightarrow a^{-1}<x<a^4$.

№3. $x^{\log_a x}>a$. *Решение.* ОДЗ: $x>0,\ a>0,\ a\ne1$. Нетрудно догадаться, что для решения этого неравенства необходимо его прологарифмировать по основанию a и что при этом надо рассмотреть случаи $0<a<1$ и $a>1$: $0<a<1\Rightarrow\log_a^2 x<1\Leftrightarrow|\log_a x|<\log_a a\Leftrightarrow-\log_a a<\log_a x<\log_a a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a<x<a^{-1};a>1\Rightarrow\log_a^2 x>1\Leftrightarrow|\log_a x|>\log_a a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow0<x<a^{-1},x>a$.

Ответ: $a\le0,\ a=1\Rightarrow\varnothing;\ 0<a<1\Rightarrow a<x<a^{-1};$ $a>0\Rightarrow0<x<a^{-1},\ x>a$.

№4. $\log_a(x-1)+\log_a x>2$. *Решение.* ОДЗ: $x>1,\ a>0,\ a\ne1$. Ясно, что в ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству $\log_a(x(x-1))>\log_a a^2$, решая которое получаем: $0<a<1\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-x-a^2<0,\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a^2}}{2}$; отсюда, с учетом ОДЗ, $1<x<\frac{1\pm\sqrt{4a^2+1}}{2}$; $a>1\Rightarrow x^2-x-a^2>0$; отсюда, с учетом ОДЗ, получаем $x>\frac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2}$.

Ответ: $a\le0,\ a=1\Rightarrow\varnothing;\ 0<a<1\Rightarrow1<x<\frac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2}$; $a>1\Rightarrow\ x>\frac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2}$.

Упражнения

№5. $x^{3+\log_a x} < a^2x^2$. №6. $\log_a(7-x) > 2\log_a(x-1)$. №7. $\log_{x+2}(x^2 - -2x + a) \geq 2$. №8. $\log_x(x - a) > 2$. №9. $\log_{\sqrt{2a}}(a + 2 - x^2) < 2$.

Ответы

№5. $a \leq 0,\ a = 1 \Rightarrow \varnothing;\ 0 < a < 1 \Rightarrow 0 < x < a,\ x > a^{-2};\ a > 1 \Rightarrow a^{-2} < x < a$.
№6. $a \leq 0,\ a = 1 \Rightarrow \varnothing;\ 0 < a < 1 \Rightarrow 3 < x < 7;\ a > 1 \Rightarrow 1 < x < 3$.
№7. $a \leq -8,\ a = 2 \Rightarrow \varnothing;\ -8 < a \leq -3 \Rightarrow \frac{a-4}{6} \leq x < 1 - \sqrt{1-a};\ -3 < a < -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a-4}{6} \leq x \leq -1;\ a > -2 \Rightarrow -1 < x \leq \frac{a-4}{6}$. №8. $a = 0,\ a \geq 1 \Rightarrow \varnothing;\ a < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < x < \frac{1 = \sqrt{1-4a}}{2};\ 0 < a \leq \frac{1}{4} \Rightarrow a < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} < x < 1;$
$\frac{1}{4} < a < 1 \Rightarrow a < x < 1$. №9. $a \leq 0,\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow \varnothing;\ 0 < a < \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a};\ \frac{1}{2} < a \leq 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+a} < x < 1 + \sqrt{1-a},\ 1 + \sqrt{1-a} < x <$
$< 1 + \sqrt{1+a};\ a > 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+a} < x < 1 + \sqrt{1+a}$.

Урок 9. Тригонометрические неравенства

№1. $\cos x \leq 2 - a^2$. *Решение.* Поскольку $|\cos x| \leq 1$, заключаем, что если $2 - a^2 < -1$, то решений нет, а если $2 - a^2 \geq 1$, то любое значение x является решением нашего неравенства; если же, наконец, $-1 \leq 2 - a^2 < 1$, то, как легко установить, рассматривая эскиз графиков функций $y = \cos x$ и $y = 2 - a^2$, получаем, что $\arccos(2 - a^2) + 2k\pi \leq x \leq$ $\leq -\arccos(2 - a^2) + 2(k + 1),\ k \in Z$. Таким образом,

Ответ: $|a| > \sqrt{3} \Rightarrow \varnothing;\ |a| \leq 1 \Rightarrow x \in R;\ 1 < |a| \leq \sqrt{3} \Rightarrow \arccos(2 - a^2) +$ $+2k\pi \leq x \leq -\arccos(2 - a^2) + 2(k + 1)\pi,\ k \in Z$.

№2. $\sin x + \dfrac{1}{\sin x} \le a$. *Решение.* Делая замену $t = \sin x$, после простых преобразований получаем неравенство $\dfrac{t^2 - at + 1}{t} \le 0$. Дискриминант D числителя имеет вид $D = a^2 - 4$. Теперь если $D < 0$, т.е. $|a| < 2$, то $t > 0$, т.е. $\sin x > 0$, что равносильно неравенствам $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in Z$. Если же $D \ge 0$, т.е. $|a| \ge 2$, то неравенство принимает вид $\dfrac{(t - t_1)(t - t_2)}{t} \le 0$, где $t_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Непосредственно проверяется, что если $a \le -2$, то $-1 \le t_1 < 0$ и $t_2 < -1$, а если $a \ge 2$, то $t_1 > 1$ и $0 < t_2 \le 1$. Отсюда, поскольку $|t| = |\sin x| \le 1$, в случае $a \le -2$ приходим к неравенству $\dfrac{t - t_1}{t} \le 0$, а в случае $a \ge 2$ получаем неравенство $\dfrac{t - t_2}{t} \ge 0$. Следовательно, если $a \le -2$, то $t_1 \le t < 0$, а если $a \ge 2$, то $t<0$ или $t \ge t_2$. Решая двойное неравенство $t_1 < \sin x < 0$, получаем две серии интервалов: $\arcsin t_1 + 2k\pi \le x < 2k\pi$, $\pi + 2l\pi < x \le \pi - \arcsin t_1 + 2l\pi$, $k, l \in Z$. Совокупность же неравенств $\sin x < 0$, $\sin x \ge t_2$ дает еще две серии интервалов: $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$, $\pi - \arcsin t_2 + 2l\pi \le x \le \arcsin t_2 + 2l\pi$, $k, l \in Z$. Таким образом получаем

Ответ: $|a| < 2 \Rightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in Z$; $a \le -2 \Rightarrow \arcsin\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2k\pi \le x < 2k\pi$, $\pi + 2l\pi < x \le \pi - \arcsin\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2l\pi$, $k, l \in Z$; $a \ge 2 \Rightarrow -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$, $\pi - \arcsin\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2l\pi \le x \le \arcsin\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} + 2l\pi$, $k, l \in Z$.

№3. $lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x + 2 - a^2 > 0$. *Решение.* ОДЗ: $\sin x > 0$. Делая замену $t = lg \sin x$, решаем неравенство $t^2 - 2at + 2 - a^2 > 0$: ясно, что если $\frac{D}{8} < 0$, где $D = 4a^2 - 4(2 - a^2)$, т.е. если $a^2 - 1 < 0$, то t любое; если же $a^2 - 1 = 0$, то $t \neq a$; если, наконец, $a^2 - 1 > 0$, то $t < t_2$ или $t > t_1$, где $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2a^2 - 2}$. Итак, получаем $|a| < 1 \Rightarrow \sin x > 0$; $|a| = 1 \Rightarrow \sin x > 0$ и $\sin x \neq \frac{1}{10}$; $|a| > 1 \Rightarrow 0 < \sin x < 10^{a - \sqrt{2a^2 - 2}}$, $\sin x > 10^{a + \sqrt{2a^2 - 2}}$.

Рассматривая случаи, когда $t_1 \geq 0$, $t_1 < 0$, $t_2 \geq 0$, $t_2 < 0$, и обозначая $\alpha = \arcsin(10^{a - \sqrt{2a^2 - 2}})$, $\beta = \arcsin(10^{a + \sqrt{2a^2 - 2}})$ в случае, когда $10^{a - \sqrt{2a^2 - 2}} \leq 1$, $10^{a + \sqrt{2a^2 - 2}} \leq 1$, получаем

Ответ: $a \leq -\sqrt{2} \Rightarrow \alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in Z$; $-\sqrt{2} < a < -1 \Rightarrow \alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi$, $\beta + 2l\pi < x < \pi - \beta + 2l\pi$, $k, l \in Z$; $|a| = 1 \Rightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$ и $x \neq (-1)^l \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) + l\pi$, $k, l \in Z$; $|a| < 1$, $1 < a \leq \sqrt{2} \Rightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in Z$.

Упражнения

№4. $(a^2 - 4)\cos x + 4a \sin x \leq 8a$. №5. $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geq a$. №6. $(5a - 7)\cos x < < a + 5$.

Ответы

№4. Пусть $\alpha = \arccos \frac{8a}{a^2 + 4}$ при условии $\left|\frac{8a}{a^2 + 4}\right| \leq 1$; $\beta = \operatorname{arctg} \frac{4a}{a^2 - 4}$; тогда $a \leq -4 - 2\sqrt{3}$, $|a| \leq 4 - 2\sqrt{3}$, $a \geq 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \alpha + \beta + 2k\pi \leq x \leq$ $\leq -\alpha + \beta + 2(k+1)\pi$, $k \in Z$; $-4 - 2\sqrt{3} < a < -4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \varnothing$; $4 - 2\sqrt{3} < a < 4 +$

$+2\sqrt{3} \Rightarrow R$. №5.Пусть $\alpha = \arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$, $\beta = \arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ при соответствующих ограничениях на параметр a ; тогда $a \le -2 \Rightarrow -\alpha + 2k\pi \le x \le \alpha + 2k\pi$ и $x \ne \pm\frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $k, l \in Z$; $|a| < 2 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$; $a \ge 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $-\frac{\pi}{2} + 2l\pi < x \le -\beta + 2l\pi$, $k, l \in Z$.

№6.Пусть $\alpha = \arccos\frac{a+5}{5a-7}$ при условии $\left|\frac{a+5}{5a-7}\right| \le 1$; тогда $a \le \frac{1}{3} \Rightarrow -\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$, $k \in Z$; $\frac{1}{3} < a < 3 \Rightarrow x \in R$; $a \ge 3 \Rightarrow \alpha + 2k\pi < x < -\alpha + 2(k+1)\pi$, $k \in Z$.

Задание 2.2. НАЙТИ значения параметров при данных условиях на решения

Урок 10. Алгебраические неравенства

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

№1. $ax^2 + 2x + 3a - 1 > 0$ будет верно при всех $x \ge 1$. *Решение.* Ясно, что наши рассуждения будут зависеть от коэффициента при x^2. Если $a=0$, то неравенство принимает вид $2x-1>0$ и его решения – это луч $x > \frac{1}{2}$, включающий, очевидно, луч $x \ge 1$. Значит, $a=0$ войдет в ответ. Если же $a<0$, то графиком левой части неравенства будет парабола с ветвями вниз, и нетрудно понять, что каково бы ни было отрицательное значение a_0, найдется значение $x = x_0$ такое, что $x_0 \ge 1$ и $a_0x_0 + 2x_0^2 + 2a_0 - 1 < 0$. Если, наконец, $a>0$, то, пользуясь геометрическими соображениями, легко понять, что искомые положительные значения a являются решениями совокупности $\left[\begin{array}{l}\frac{D}{4} < 0; \\ \left\{\frac{D}{4} \ge 0,\ x_1 < 1,\right.\end{array}\right.$ где $\frac{D}{4} = 1 - 3a^2 + a$, $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$.

Решая неравенство $1 - 3a^2 + a < 0$ и систему $\{1 - 3a^2 + a \ge$ $\ge 0,\ \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 3a^2 + a}}{a} < 1$ с учетом уже найденного значения $a=0$, получаем

Ответ: $a \ge 0$.

№2. $\dfrac{(x+4)(x-a)}{x-1} \le 0$ таково, что каждое его решение, лежащее на луче $(-3;+\infty)$, принадлежит промежутку $[-1;3]$. *Решение.* Поскольку исходное неравенство рационально, можно решение разбить на пять случаев в зависимости от расположения точки a по отношению к точкам -4 и 1 и на оси Ox и в каждом случае, применяя метод интервалов, проверить выполнимость требуемого условия. Можно, однако, поступить по-другому. Легко сообразить, что значение a не годится, если при этом значении наше неравенство имеет решение x_0 такое, что $-3 < x_0 < -1$ или $x_0 > 3$, т.е. если $x_0 \in (-3;+\infty)$ и $x_0 \notin [-1;3]$. Поэтому если $a \le -3$, то, полагая $x_0 = -2$, видим, что $\dfrac{(x_0+4)(x_0-a)}{x_0-1} < 0$. Если $-3 < a < -1$, то, полагая $x_0 = \dfrac{a-1}{2}$, заключаем, что $-3 < x_0 < -1$ и $\dfrac{\left(\frac{a-1}{2}+4\right)\left(\frac{a-1}{2}-a\right)}{\frac{a-1}{2}-1} = \dfrac{(a+7)(-a-1)}{2(a-3)} < 0$. Если $-1 \le a \le 3$, то метод интервалов показывает, что условие задачи выполнено. Если, наконец, $a>3$, то, полагая $x_0 = \dfrac{a+3}{2}$, видим, что $x_0 > 3$, и, как и выше, $\dfrac{(x_0+4)(x_0-a)}{x_0-1} < 0$. Таким образом,

Ответ: $-1 \le a \le 3$.

№3. $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение. *Решение.* Применим геометрический метод. Для этого перепишем неравенство в виде $|x - a| < 3 - x^2$ и рассмотрим функции $f(x) = |x - a|$, $g(x) = 3 - x^2$. Очевидно, что x_0 – отрицательное решение исходного неравенства тогда и только тогда, когда x_0 – абсцисса точки графика функции $y=f(x)$, т.е. точка $A(x_0, f(x_0))$, лежащая в левой полуплоскости и строго ниже точки графика функции $y=g(x)$ с той же абсциссой x_0, т.е. ниже точки $B(x_0, g(x_0))$. Учитывая, что график $y=f(x)$ – это прямой "угол" с вершиной на оси Ox в точке $x=a$ и осью симметрии, параллельной Oy, а график $y=g(x)$ – парабола с ветвями вниз, осью симметрии Oy, вершиной в точке $C(0,3)$ и пересекающая Ox в точках $\pm\sqrt{3}$, легко сообразить, что указанная выше точка вида A существует тогда и только тогда, когда правый луч "угла" расположен правее параллельной ему касательной l к графику $y=g(x)$ и левый луч этого "угла" расположен левее прямой $y = -x + 3$. Найдем уравнение касательной l : $g'(x) = -2x$, $-2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow l$ имеет уравнение $y = g(-\frac{1}{2}) + g'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, т.е. уравнение $y = \frac{11}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)$. Она пересекается с Ox в точке $x = -\frac{13}{4}$. Следовательно, $a > -\frac{13}{4}$. Прямая $y=-x+3$ пересекает Ox в точке $x=3$. Это значит $a<3$.

Ответ: $-\frac{13}{4} < a < 3$.

№4. $\sqrt{9 - a^2} \geq -a^2 x$ таково, что его решения образуют промежуток длины $\frac{15}{4}$. *Решение*. Применим геометрический метод. Для этого рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = -a^2 x$. График первой – полуокружность радиуса 3 с центром в O, расположенная в верхней полуплоскости, а график второй – прямая, проходящая через O и расположенная во 2-й и 4-й четвертях. Ясно, что x_0 – решение исходного неравенства тогда и только тогда, когда точка $(x_0, f(x_0))$ лежит не ниже точки $(x_0, g(x_0))$. Устройство графиков рассматриваемых функций показывает, что если (x_1, y_1) – точка их пересечения, то $x_1 < 0$ и решения x_0 образуют отрезок $[x_1;3]$. Его длина, очевидно, равна $3 - x_1$. Следовательно, $3 - x_1 = \frac{15}{4}$, откуда $x_1 = -\frac{3}{4}$, $y_1 = f(x_1) = \sqrt{9 - \frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

Теперь из равенства $y_1 = g(x_1)$ получаем $\frac{3\sqrt{15}}{4} = -a^2(-\frac{3}{4})$, т.е. $a^2 = \sqrt{15}$.

Ответ: $a = \pm\sqrt[4]{15}$.

№5. $x^2 - 4x - 8 + |x + a| \leq 0$ имеет максимальное количество целочисленных решений. *Решение.* Применим геометрический метод. Для этого перепишем неравенство в виде $x^2 - 4x - 5 \leq 3 - |x + a|$ и рассмотрим функции $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $g(x) = 3 - |x + a|$. График первой функции – парабола с ветвями вверх, вершиной в точке $(2;-9)$, пересекающая Ox в точках $x_1 = -1, x_2 = 5$ и Oy в точке $y=-5$. График второй функции – прямой угол со сторонами вниз, с осью симметрии, параллельной Ox, и вершиной в точке $(a;3)$. Ясно, что x_0 целочисленное решение исходного неравенства тогда и только тогда, когда точка $A(x_0;f(x_0))$ лежит не выше точки $B(x_0;g(x_0))$. Рассматривая графики, нетрудно догадаться, что при $a=2$, когда "угол" пересечет Ox в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, точек типа A будет 7 и что при сдвиге вершины угла влево или вправо от положения $(2;3)$ количество таких точек уменьшается. Поэтому

Ответ: $a=2$.

№6. $\sqrt{x+1} \geq x + a$ имеет минимальное количество отрицательных решений . *Решение.* Решая задачу геометрически, заметим, что функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = x + a$ мы уже рассматривали в задаче №5 из урока 4. Используя эти рассмотрения легко понять, что условие задачи будет выполняться, если прямая $y=x+a$ касается параболы $y=\sqrt{x+1}$, а это будет при $a=\frac{5}{4}$.

Ответ: $a=\frac{5}{4}$.

Упражнения

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

№7. $x^2 - ax + a^2 - 6a \geq 0$ выполняется для всех $x \in [-1;1]$. №8. $(a-x^2)(a+x-2)<0$ не удовлетворяет ни одному решению неравенства $x^2 \leq 1$. №9. $ax^2-(3a+1)x+3>0$ выполняется для любого решения неравенства $x^2-3x+2<0$. №10. $|x-a|+x^2<3$ имеет хотя бы одно положительное решение. №11. $\left|\frac{a+3}{2}\right|\cdot|x+a-6|-|a+3|\cdot|x+3|+\frac{(a^2+6a+8)\cdot|x+3|}{|a+3|}+\left|\frac{a+3}{2}\right|\cdot|x-a|\leq 2$ выполняется ровно для двух различных значений x.

Ответы

№7. $a\leq 0$, $a\geq\frac{7+\sqrt{45}}{2}$. №8. $a\leq 0$, $a\geq 3$. №9. $a\leq\frac{1}{2}$. №10. $-\frac{9}{4}<a<2$. №11. $a=-3\pm\sqrt{3}$.

Урок 11. Показательные и логарифмические неравенства

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

№1. $9^x - a\cdot 3^x - a = 3 \leq 0$ совместно, т.е. имеет решения. *Решение*. Делая замену $t=3^x$, получим квадратное неравенство $t^2-at-(a-3)\leq 0$ с дискриминантом $D=a^2+4a-12$

и большим корнем $t_1 = \dfrac{a+\sqrt{D}}{2}$ при $D \geq 0$. Учитывая, что $t>0$, и используя теорию решения квадратных неравенств, заключаем, что искомые значения a составляют множество решений системы $\{D \geq 0, t_1 > 0$. Решая ее, получаем

Ответ: $a \geq 2$.

№2. $\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2+2x+2) > 1$ выполняется при любом x. *Решение*. ОДЗ: $a^2-2>0$, $a^2-2 \neq 1$, $(a^2-1)x^2+2x+2>0$. Заменяя 1 на $\log_{a^2-2}(a^2-2)$ и потенцируя исходное неравенство в случаях, когда $0 < a^2-2 < 1$ и $a^2-2>1$, с учетом ОДЗ получаем, что исходное неравенство равносильно совокупности двух систем: (1) $\{\sqrt{2} < |a| < \sqrt{3}$, $0 < (a^2-1)x^2+2x+2 < a^2-2$; (2) $\{|a| > \sqrt{3}, (a^2-1)x^2+2x+2 > a^2-2$. Легко устанавливается, что ни при каком a система (1) не будет выполнена для всех x, а система (2) выполняется для всех x тогда и только тогда, когда дискриминант второго неравенства меньше нуля. С учетом того, что $|a| > \sqrt{3}$, получаем

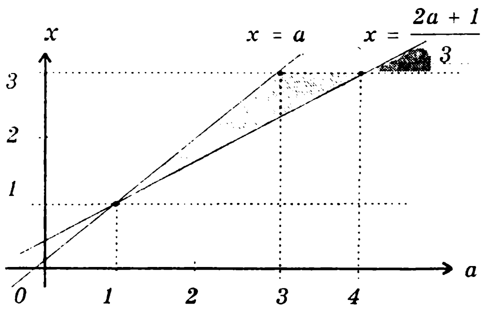
Ответ: $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

№3. $0.5^{-\frac{1}{2(x-1)^2}} \leq 0.25^{-\frac{1}{(3-x)^2}}$ таково, что его решения являются решениями неравенства $16a^4x^2-9 \leq 0$. *Решение*. Очевидно, первое неравенство равносильно неравенству $\dfrac{1}{2(x-1)^2} \geq \dfrac{2}{(x-3)^2}$, решая которое получаем $-1 \leq x \leq \dfrac{5}{3}$. Решаем второе неравенство: $16a^4x^2-9 \leq 0 \Leftrightarrow (a^2x)^2 \leq \dfrac{9}{16} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2|x| \leq \dfrac{3}{4}$; если $a=0$, то x – любое и условие задачи выполняется; если же $a \neq 0$, то $|x| \leq \dfrac{3}{4a^2}$, и для того чтобы отрезок $-1 \leq x \leq \dfrac{5}{3}$ включался в отрезок $-\dfrac{3}{4a^2} \leq x \leq \dfrac{3}{4a^2}$, необходимо и достаточно, чтобы $\begin{cases} -\dfrac{3}{4a^2} \le -1, & \dfrac{3}{4a^2} \ge \dfrac{5}{3} \end{cases}$. Решая эту систему неравенств, получаем

Ответ: $|a| \le \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

№4. $\log_{\frac{x-1}{2}}(a - x) > 1$ не имеет решений. *Решение.* Учитывая ОДЗ, возможности основания логарифма быть меньше (больше) единицы и потенцируя рассматриваемое неравенство, заключаем, что исходное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} 0 < \dfrac{x-1}{2} < 1, & a - x > 0, & a - x < \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1, & a - x > 0, & a - x > \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$. Они равносильны соответственно системам (1) $\begin{cases} 1 < x < 3, & \dfrac{2a+1}{3} < x < a, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3 < x < \dfrac{2a+1}{3} \end{cases}$.

В отличие от исходного неравенства нахождение значений a, при которых системы (1) и (2) несовместны, что равносильно отсутствию решений исходного неравенства, значительно проще. Это можно сделать аналитически: (1) несовместна тогда и только тогда, когда $a \le \dfrac{2a+1}{3}$, $3 \le \dfrac{2a+1}{3}$ или $a \le 1$, т.е. когда $a \le 1$ или $a \ge 4$; (2) несовместна тогда и только тогда, когда $\dfrac{2a+1}{3} \le 3$, т.е. когда $a \ge 4$; следовательно, одновременно обе системы несовместны тогда и только тогда, когда $a \le 1$ или $a=4$. Это же можно сделать и геометрически в системе координат Oax. Для этого изобразим прямые с уравнениями $x=1$, $x=3$, $x=a$, $x = \dfrac{2a+1}{3}$ и заштрихуем области, изображающие решения систем (1), (2):



Здесь одинарная штриховка выделяет решения системы (1), а двойная – (2). Теперь очевидно, что

Ответ: $a \le 1, a = 4$.

Упражнения

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

№5. $\log_{a(a+1)}(|x| + 4) > 1$ выполняется для любых x.

№6. $\log_{0.5} x^2 \ge \log_{0.5}(x + 2)$ таково, что его решения являются решениями неравенства $49x^2 - 4a^4 \le 0$. №7. $\log_2(x - 100) - \log_{\frac{1}{2}} \frac{|x - 101|}{105 - x} + \log_2 \frac{|x - 103|(105 - x)}{x - 100} > a$ имеет единственное целое решение. №8. $\log_{2x}(3x + a) < 1$ не имеет решений. №9. $\log_{x-a} x^2 < 2$ выполняется хотя бы для одного x такого, что $|x| < 0,01$.

Ответы

№5. $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < a < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{17}-1}{2}$. №6. $|a| \ge \sqrt{7}$.

№7. $0 \le a < \log_2 3$. №8. $a = -\frac{1}{2}$. №9. $a < -0,99$, $-0,02 < a < 0$, $0 < a < 0,01$.

Урок 12. Тригонометрические неравенства

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

№1. $\sin^4 x + \cos^4 x > a\sin x\cos x$ выполняется при всех x.

Решение. Преобразуем неравенство, прибавив к его обеим частям $2\sin^2 x\cos^2 x$: $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x > a\sin x\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 2x \Leftrightarrow t^2 + at - 2 < 0$, где $t = \sin 2x$; $t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$,

$t_2 < t < t_1 \Leftrightarrow \frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} < \sin 2x < \frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}$.

Теперь ясно, что последнее двойное неравенство выполнено при всех x тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} \le -1, \\ \frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2} \ge 1. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем

Ответ: $|a| \le 1$.

№2. $\left|\left|\sin x - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3}\right| \le a$ выполняется при всех $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$. *Решение.* Если $a=0$, то $\sin x=0$ или $\sin x = \frac{2}{3}$ и требуемое условие не выполняется, т.к., например, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\frac{\pi}{3} \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ и $\sin\frac{\pi}{3} \ne 0$, $\sin\frac{\pi}{3} \ne \frac{2}{3}$. Пусть теперь $a>0$. Тогда исходное неравенство равносильно двойному неравенству $\frac{1}{3} - a \le \left|\sin x - \frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3} + a$. Если при этом $\frac{1}{3} - a \le 0$, т.е. $a \ge \frac{1}{3}$, то последнее двойное неравенство равносильно, очевидно, двойному неравенству $-a \le \sin x \le a + \frac{2}{3}$. В силу того что $a \ge \frac{1}{3}$, получаем $\sin x \ge -a$, и, легко понять, это неравенство выполнено при всех $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$. Если же, напротив, $\frac{1}{3} - a > 0$, т.е. $0 < a < \frac{1}{3}$, то указанное выше двойное неравенство равносильно совокупности систем $\begin{cases} -a - \frac{1}{3} \le \sin x - \frac{1}{3} \le a + \frac{1}{3}, \\ \sin x - \frac{1}{3} \le a - \frac{1}{3} \end{cases}$ и $\begin{cases} -a - \frac{1}{3} \le \sin x - \frac{1}{3} \le a + \frac{1}{3}, \\ \sin x - \frac{1}{3} \ge \frac{1}{3} - a, \end{cases}$ которая, в свою очередь, равносильна совокупности двойных неравенств $-a \le \sin x \le a$, $\frac{2}{3} - a \le \sin x \le \frac{2}{3} + a$. Поскольку $\frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ и $0 < a < \frac{1}{3}$, заключаем, что решения последних двойных неравенств не заполняют отрезок $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, т.е. не любой x из этого отрезка является решением исходного неравенства.

Ответ: $a \ge \frac{1}{3}$.

Упражнения

Найти все значения параметра a, при которых неравенство

№3. $4^{|\cos x|} + 2(2a+1)2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0$ выполняется при всех значениях x. №4. $\frac{4}{3}(x^2 - ax) - \frac{\pi}{3} < \sin(x^2 - ax) + \cos(2x^2 - 2ax + \frac{\pi}{4})$ выполняется для всех $x \in [\pi; 2\pi]$. №5. $(a \quad 1)\sin^2 x + 2(a-2)\sin x + a + 3 < 0$ не имеет решений.

Ответы

№3. Искомых значений a не существует. №4. $a > 2\pi - \frac{1}{8}$.

№5. $a \ge \frac{1}{2}$.

ТЕМА 3. СИСТЕМЫ

Задание 3.1. РЕШИТЬ в зависимости от значений параметров

Урок 13. Системы уравнений и неравенств

№1. $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1. \end{cases}$ *Решение.* Выражая y из первого уравнения и подставляя соответствующее выражение вместо y во второе, получаем $x(1-a^2) = 1 - a^4$. Теперь если $a^2 = 1$, то $a^4 = 1$ и последнее равенство принимает вид $x \cdot 0 = 0$ и выполняется для любого x. Если же $a^2 \neq 1$, то $1 - a^2 \neq 0$ и $x = a^2 + 1$. Поскольку из первого уравнения $y = a^3 - ax$, получаем

Ответ: $a = -1 \Rightarrow x \in R,\ y = x - 1;\ a = 1 \Rightarrow x \in R,\ y = 1 - x;$ $|a| \neq 1 \ \Rightarrow x = a^2 + 1,\ y = -a.$

№2. $\begin{cases} x^2 + 3ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 1. \end{cases}$ *Решение.* Прибавляя к первому уравнению второе и очевидным образом переписывая полученное уравнение, приходим к уравнению $x^2 + ax - 2(a+1) = 0$, откуда $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a + 8}}{2}$. Для обеспечения действительности найденных корней потребуем, чтобы $a^2 + 8x + 8 \geq 0$, т.е. чтобы $a \leq -4 - 2\sqrt{2}$, $\quad a \geq -4 + 2\sqrt{2}$. Из второго уравнения системы получаем $3ay = ax - 2a - 1$. При $a=0$ это уравнение, а вместе с ним и система, решений не имеет; при $a \neq 0$ получаем $y = \dfrac{ax - 2a - 1}{3a}$, откуда $y_{1,2} = \dfrac{ax_{1,2} - 2a - 1}{3a}$.

Ответ: $-4 - 2\sqrt{2} < a < -4 + 2\sqrt{2},\ a = 0 \Rightarrow \varnothing;\ a \leq -4 - 2\sqrt{2}$, $a \geq -4 + 2\sqrt{2}$ и $a \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a + 8}}{2},\ y_{1,2} = \dfrac{ax_{1,2} - 2a - 1}{3a}$.

№3. $\begin{cases} (2^x + 1)2^{y+1} = a, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = x + y. \end{cases}$ *Решение.* Из второго уравнения заключаем, что $x + y \geq 0$ и, возводя обе его части в квадрат, получаем $xy=0$. Следовательно, возможны лишь два случая: $x = 0,\ y \geq 0;\ x \geq 0,\ y = 0$. Если $x = 0, y \geq 0$, то первое уравнение принимает вид $2^{y+2} = a$, откуда, в силу того, что $2^{y+2} \geq 4$, имеем $a \geq 4, y = -2 + \log_2 a$. Если же $x \geq 0, y = 0$, то первое уравнение принимает вид $(2^x + 1)2 = a$, откуда опять $a \geq 4$, но $x = \log_2 \frac{a-2}{2}$. Таким образом, получаем

Ответ: $a < 4 \Rightarrow \varnothing$; $a \geq 4 \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = -2 + \log_2 a$; $x_2 = \log_2 \frac{a-2}{2}, y_2 = 0$.

№4. $\begin{cases} \sin xy + \cos xy = \sqrt{2}(a^2+1), \\ \sin 2y \cos x = a. \end{cases}$ *Решение*. Первое уравнение методом введения вспомогательного угла преобразуем к уравнению $\sin(xy + \frac{\pi}{4}) = a^2 + 1$, из которого, в силу ограниченности синуса, получаем $a=0$ и, следовательно, $\sin(xy + \frac{\pi}{4}) = 1$, а из второго уравнения получаем $\sin 2y = 0$ или $\cos x = 0$. Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ y = \frac{l\pi}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} xy = \frac{\pi}{4} + 2m\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \end{cases} \end{array}\right.$ где $k, l, m, n \in Z$. Учитывая, что из первого уравнения первой системы следует $y \neq 0$, т.е. $l \neq 0$, получаем

Ответ: $x = \frac{8k+1}{2l}, y = \frac{l\pi}{2}$ или $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, y = \frac{8m+1}{4n+1}$, $k, l, m, n \in Z, l \neq 0$.

№5. $\begin{cases} ax > -1, \\ a + x > 0. \end{cases}$ *Решение*. Если $a<0$, то получаем систему $\begin{cases} x < -\frac{1}{a}, \\ x > -a. \end{cases}$ Ясно, что если $-\frac{1}{a} \leq -a$, т.е. $a \leq -1$, то эта система несовместна, а если $-\frac{1}{a} > -a$, т.е. $-1 < a < 0$, то $-a < x < -\frac{1}{a}$. Если же $a = 0$, то система равносильна системе $\begin{cases} 0 > -1, \\ x > 0. \end{cases}$ Если, наконец, $a > 0$, то имеем $\begin{cases} x > -\frac{1}{a}, \\ x > -a. \end{cases}$

При этом если $-a \geq -\frac{1}{a}$, т.е. $0 < a \leq 1$, то $x > -a$, а если $-a < -1$, т.е. $a > 1$, то $x > -\frac{1}{a}$.

Ответ: $a \leq -1 \Rightarrow \varnothing$; $-1 < a < 0 \Rightarrow -a < x < -\frac{1}{a}$; $a = 0 \Rightarrow x > 0$; $0 < a \leq 1 \Rightarrow x > -a$; $a > 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{a}$.

Упражнения

№6. $\begin{cases} ax + 2y = a + 2, \\ 2ax + (a+1)y = 2a + 4. \end{cases}$ №7. $\begin{cases} x^2 = (x-a)y, \\ y^2 - xy = 9ax. \end{cases}$ №8. $\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ \log_2 \sin y = (\log_2 a)(\log_a(2 - 3\cos x)), \\ \log_a z + \log_a\left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0. \end{cases}$ №9. $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0, \\ x^2 - (a+3)x < 0. \end{cases}$

№10. $\begin{cases} 2\sqrt{ax} \leq 3a - x, \\ x - \sqrt{\frac{x}{a}} \geq \frac{6}{a}. \end{cases}$

Ответы

№6. $a = 0 \Rightarrow \varnothing$; $a = 3 \Rightarrow x \in R$, $y = \frac{5 - 3x}{2}$; $a \neq 0$ и $a \neq 3 \Rightarrow x = \frac{a+2}{2}$, $y = 0$. №7. $a = 0 \Rightarrow x \in R$, $y = x$; $a \neq 0 \Rightarrow x = y = 0$, или $x = \frac{3a}{2}$, $y = \frac{9a}{2}$, или $x = \frac{3a}{4}$, $y = -\frac{9a}{4}$. №8. $a \leq 0$, $a = \frac{1}{4}$, $a > \frac{1}{3} \Rightarrow \varnothing$; $0 < a < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\arcsin\frac{2a-1}{3a-2} + 2k\pi$, $y = (-1)^l \arcsin\frac{1}{2-3a} + l\pi$, $z = \frac{2a}{1-2a}$, $k, l \in Z$. №9. $a < -3 \Rightarrow a + 3 < x < 0$; $a = -3$, $a = 1 \Rightarrow \varnothing$; $-3 < a < -2 \Rightarrow 0 < x < a + 3$; $-2 \leq a \leq 0 \Rightarrow 0 < x < 1$; $0 < a < 1 \Rightarrow a < x < 1$; $a > 1 \Rightarrow 1 < x < a$. №10. $a < -\frac{2}{3}$, $0 \leq a < 3 \Rightarrow \varnothing$; $-\frac{2}{3} \leq a < 0 \Rightarrow \frac{4}{a} \leq x \leq 9a$; $a \geq 3 \Rightarrow \frac{9}{a} \leq x \leq a$.

Задание 3.2. НАЙТИ значения параметров при данных условиях на решения

Урок 14. Системы уравнений

Найти все значения параметра, при которых система уравнений

№1. $\{2x + ay = a + 2,\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4$ (а) неопределена, (б) определена, (в) несовместна. *Решение.* Поскольку уравнения системы – это линейные уравнения от двух переменных, удобно исследовать систему, используя геометрические соображения: уравнения системы – уравнения прямых l_1 и l_2 (при фиксированном значении a). Поэтому система неопределена, т.е. имеет более одного решения, если $l_1 = l_2$; эта система определена, т.е. имеет единственное решение, если l_1 и l_2 пересекаются; наконец, наша система несовместна, т.е. не имеет решений, если l_1 параллельна l_2 Осталось вспомнить, что $l_1 = l_2$ в случае, когда коэффициенты при одинаковых переменных и свободные члены пропорциональны; l_1 пересекается с l_2 в случае, когда коэффициенты при переменных непропорциональны; l_1 параллельна l_2 в случае, когда коэффициенты при переменных пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам. Таким образом, (а) $\dfrac{2}{a+1} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{a+2}{2a+4} \Leftrightarrow a = 3$; (б) $\dfrac{2}{a+1} \neq \dfrac{a}{2a} \Leftrightarrow a \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$;
(в) $\dfrac{2}{a+1} = \dfrac{a}{2a} \neq \dfrac{a+2}{2a+4} \Leftrightarrow a = 3$ и $a \neq 3$, что невозможно.

Ответ: (а) $a = 3$; (б) $a \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; (в) $\varnothing$.

№2. $\{x^2 + y^2 = 1, x + y = a$ имеет 0, 1, 2, ... решений.

Решение. Применим геометрический метод, рассматривая уравнения системы как уравнения линий в координатах Oxy. Тогда первое уравнение – это уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке 0; второе уравнение при фиксированном a – это уравнение прямой с углом наклона $\dfrac{3\pi}{4}$, пересекающей ось Oy в точке с ординатой $y=a$. Используя это, нетрудно записать

Ответ: $|a| > \sqrt{2} \Rightarrow \varnothing$; $a = \sqrt{2} \Rightarrow 1$ решение; $|a| < \sqrt{2} \Rightarrow 2$ решения.

№3. $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ совместна. *Решение.* Рассмотрим графики уравнений системы в координатах Oxy. График первого уравнения – это ромб с вершинами на осях координат, имеющих абсциссы ± 1 и ординаты ± 1. График второго уравнения при $a<0$ пуст, при $a=0$ – это точка 0, а при $a>0$ – это окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке 0. Поэтому система совместна тогда и только тогда, когда графики наших уравнений пересекаются, поэтому простые вычисления дают

Ответ: $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

№4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = a \end{cases}$ имеет ровно три решения. *Решение.* Снова,как и при решении №2,3,рассматриваем графики уравнений системы в системе координат Oxy: графиком первого уравнения является окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке 0, а график второго уравнения при фиксированном a – это ломаная, состоящая из двух взаимно перпендикулярных лучей, исходящих из точки с координатами $(-a,0)$ и составляющих с осью Ox углы, равные $\frac{\pi}{2}$. Сделав соответствующий рисунок, легко понять, что указанные графики будут иметь ровно три точки пересечения и, значит, система будет иметь ровно три решения лишь в случае, когда вершина ломаной будет располагаться в левой точке пересечения окружности с осью Ox. Это значит, что $-a = -\sqrt{2}$, т.е.

Ответ: $a = \sqrt{2}$.

№5. $\begin{cases} 2\cos x - \cos(a - y) = 0, \\ \log_2(ay - y^2) = 2\log_4(-x) = \log_{\frac{1}{2}}(3y) \end{cases}$ имеет нечетное число решений. *Решение.* ОДЗ: $x < 0,\ 0 < y < a$. Решаем второе уравнение, производя следующие равносильные в ОДЗ переходы: $\log_2(ay - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(3y) \Leftrightarrow \log_2(ay - y^2) = \log_2(-3xy) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ay - y^2 = -3xy \Leftrightarrow a - y = -3x \Leftrightarrow y = a + 3x.$ Теперь первое уравнение дает $2\cos x - \cos 3x = 0$, откуда, применяя формулу $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, получаем $5\cos x - 4\cos^3 x = 0$. Последнее уравнение равносильно совокупности $\left[\cos x = 0,\ \cos^2 x = \frac{5}{4}\right.$, и, поскольку $|\cos x| \le 1$, имеем $\cos x = 0$, т.е. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$. Значит, $y = a + \frac{3\pi}{2}(2k+1)$, и, требуя выполнения условий ОДЗ, получаем $\frac{\pi}{2}(2k+1) < 0$, $0 < a + \frac{3\pi}{2}(2k+1) < a$. Первое неравенство с учетом $k \in Z$ дает условие $k \le -1$, при котором двойное неравенство равносильно тому, что $a > -\frac{3\pi}{2}(2k+1)$. Разрешая последнее неравенство относительно k, получаем $k > -\frac{2a+3\pi}{6\pi}$, т.е. $-\frac{2a+3\pi}{6\pi} < k \le -1$. Осталось на a наложить такие ограничения, чтобы на полуинтервале $\left(-\frac{2a+3\pi}{6\pi}; -1\right]$ располагалось нечетное число целых чисел. Именно тогда k будет принимать нечетное число различных целых значений, и, следовательно, поскольку $y = a + \frac{3\pi}{2}(2k+1)$, исходная система будет иметь нечетное число решений. Нетрудно понять, что искомые ограничения таковы: $-2l - 4 \le -\frac{2a+3\pi}{6\pi} < -2l < -3$, где $l \in Z$ и $l \ge 0$. Решая это двойное неравенство относительно a, получаем

Ответ: $\frac{\pi}{2}(12l+15) < a \le \frac{\pi}{2}(12l+21)$, $l \in Z$, $l \ge 0$.

Упражнения

Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

№6. $\{\,|x| + |y| = 1,\ |x - a| + |y| = 1$ имеет единственное решение.

№7. $\left\{1 - \sqrt{x-1} = \sqrt{7 \cdot |y|},\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1\right.$ имеет точно четыре решения. №8. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ |x|+y=a^2 \end{cases}$ имеет данное количество решений. №9. $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$ №10. $\begin{cases} ax^2+a-1=y-|\sin x|, \\ tg^2 x+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответы

№6. $a_{1,2}=\pm 2$. №7. $a_1=-\frac{1}{32}, a_2=-\frac{1}{4}$. №8. $|a|>\sqrt[4]{2} \Rightarrow 0$ корней; $|a|=\sqrt[4]{2}$, $|a|<1 \Rightarrow 2$ корня; $|a|=1 \Rightarrow 3$ корня; $1<|a|<\sqrt[4]{2} \Rightarrow 4$ корня. №9. $a<\frac{\pi^2}{2}$. №10. $a=2$.

Урок 15. Системы неравенств

Найти все значения параметра, при которых система неравенств

№1. $-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$ выполняется при всех x. *Решение*. Поскольку, в силу отрицательности дискриминанта и положительности старшего коэффициента, $x^2-x+1>0$ для всех $x \in R$, исходная система равносильна системе $\begin{cases} x^2+ax-2<2(x^2-x+1), \\ x^2+ax-2>-3(x^2-x+1) \end{cases}$ или системе $\begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0, \\ 4x^2+(a-3)x+1>0. \end{cases}$ Ясно, что оба последних неравенства справедливы для любого x тогда и только тогда, когда дискриминанты их левых частей меньше нуля, т.е. когда a удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} a^2+4a-12<0, \\ a^2-6a-7<0. \end{cases}$ Решая ее, получаем

Ответ: $-1<a<2$.

№2. $\begin{cases} ax+1>0, \\ x+a>0 \end{cases}$ совместна. *Решение*. Исходная система равносильна системе $\begin{cases} ax>-1, \\ x>-a, \end{cases}$ которая при $a \geq 0$, легко понять, совместна. Пусть $a<0$. Тогда последняя система равносильна системе $\begin{cases}-a < x, \ x < -\dfrac{1}{a}\end{cases}$, которая, очевидно, совместна тогда и только тогда, когда $-a < -\dfrac{1}{a}$, что при условии $a<0$ равносильно неравенству $a > -1$. Таким образом, получаем

Ответ: $a > -1$.

№3. $\begin{cases}y \geq x^2 + 2a, \ x \geq y^2 + 2a\end{cases}$ имеет единственное решение. *Решение*. Применим геометрический метод. Множество решений первого неравенства системы – это “внутренность” параболы с уравнением $y = x^2 + 2a$ вместе с этой параболой. Аналогично множество решений второго неравенства – это “внутренность “ параболы с уравнением $x = y^2 + 2a$ вместе с этой параболой. Первая парабола имеет вершину в точке с координатами $(0,2a)$, а ее ветви направлены вверх и она симметрична относительно оси Oy. Вторая же парабола имеет вершину $(2a,0)$, а ее ветви направлены вправо, и она симметрична относительно оси Ox. Следовательно, указанные выше множества решений будут иметь единственную особую точку тогда и только тогда, когда рассматриваемые параболы касаются, причем точка касания лежит на прямой $y=x$, поскольку наши параболы симметричны относительно этой прямой. Стало быть, если (x_0, x_0)– точка касания, то значение производной $(x^2 + 2a)'$ при $x = x_0$ должно равняться 1. Отсюда

$$(x^2 + 2a)' = 2x, \ 2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2a \Rightarrow a = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $a = \dfrac{1}{8}$.

№4. $\begin{cases}x^2 + y^2 \leq 2ay - a^2 + 1, a + y \leq |x|\end{cases}$ имеет ровно 2 решения. *Решение*. Применим геометрический метод. Первое неравенство равносильно, как легко понять, неравенству $x^2 + (y - a)^2 \leq 1$, множество решений которого – круг радиуса 1 с центром в точке $(0;a)$. Множество решений второго неравенства – “внешность” прямого угла со сторонами вверх, вершиной в точке $(0;-a)$ и осью Oy в качестве оси симметрии, вместе со сторонами этого угла. Теперь легко понять, что указанные области будут иметь точно две общие точки тогда и только тогда, когда стороны угла касаются окружности. Ясно, что это будет тогда и только тогда, когда $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнения

Найти все значения параметра, при которых система

№5. $\begin{cases} 2a\cos 2(x-y) + 8a^2\cos(x-y) + 8a^2(a+1) + 5a < 0, \\ x^2 + y^2 + 1 > 2ax + 2y + a - a^2 \end{cases}$ выполняется при любых x, y.

№6. $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y \geq \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$ совместна.

№7. $\begin{cases} x^2 - y^2 \leq -a^2 + a - 2, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответы

№5. $a < -\frac{4+\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{1}{2} < a < 0$. №6. $a < -1$. №7. $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

ТЕМА 4
РЕПЕТИЦИИ

Уральский государственный университет (УрГУ)

Вариант 1
(1994, математико-механический факультет)

1. Решить уравнение $cos(2x + \frac{2\pi}{3}) + 4\,sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{5}{2}$.

2. Решить неравенство $log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^{x}) \geq -2$.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения $|x-1| + |3x-6| = a - x$ имеется только одно положительное.

4. В основании пирамиды SABCD лежит квадрат ABCD со стороной, равной a. Высота пирамиды проходит через вершину A. Через центр основания параллельно боковой грани SCD проведена плоскость, причем площадь полученного сечения равна $\frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$. Найти объем пирамиды.

Вариант 2
(1995, математико-механический факультет)

1. Решить уравнение $tg2x\cos 6x + \sin 6x + \sqrt{23}\sin 8x = 0$.

2. Решить неравенство $\frac{x+2}{log_{\frac{1}{3}}(4^{x} - 10\cdot 2^{x} + 17)} \geq 0$.

3. При каких значениях параметра a оба корня квадратного уравнения $x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ отрицательны?

4. Высота равнобочной трапеции равна 14 см, а основания равны 12 и 16 см. Определить площадь описанного угла.

Уральский государственный технический университет (УГТУ–УПИ)

Вариант 3
(1995, физико-технический и радиотехнический факультеты)

1. Сформулировать и доказать теорему о свойстве точек, равноудаленных от концов отрезка.

2. Решить неравенство $\dfrac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2\sin x$.

3. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

4. Радиус круга равен 5, а хорды двух дуг равны 6 и 8. Найдите хорду дуги, равной сумме этих дуг.

5. В состав тепловой электростанции входят три турбины, которые, работая вместе, расходуют в течение часа 30 тонн топлива. Режим работы был таков, что сначала проработала более 3 часов только первая турбина, израсходовав при этом 40 тонн топлива. После этого она была остановлена, а запущены были одновременно вторая и третья турбины. Все турбины функционировали в течение 8-часового отрезка времени, причем было израсходовано 120 тонн топлива. На сколько часов хватило бы этого топлива, если бы работала все время только одна первая турбина?

6. При каких значениях a уравнение $\sin(x+a)+a^2+$ $+\,2a=0$ имеет решения?

Вариант 4
(1995, факультет экономики и управления)

1. Вывести формулы логарифма произведения, степени и частного.

2. Найти точки минимума и максимума функции

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1.$$

3. При каких значениях a функция

$y=(a-3)x^2+3x+a+2$ отрицательна при любых x?

4. Найти все корни уравнения $4\sin(x-\dfrac{\pi}{3})\cos x = -\sqrt{3}$, принадлежащие отрезку $[-1;3]$.

5. Боковые грани пирамиды, основанием которой является равнобедренная трапеция с высотой, равной 4, одинаково наклонены к плоскости основания. Через вершину пира-

миды и высоты боковых граней, опущенные на боковые стороны трапеции, проведено сечение. Его площадь равна 3, угол при вершине равен 60^0. Найти объем пирамиды.

6. Стрелок выполнил три серии выстрелов по мишени, допустив всего один промах. Каждое попадание оценивалось в 4 или 5 очков в зависимости от места попадания, промах оценивался в 0 очков. Первая серия дала $\frac{1}{7}$ суммы всех очков, вторая серия дала столько же очков, сколько третья, причем в третьей серии было сделано пять выстрелов и не было промаха. Суммарное количество выстрелов четное, и в каждой серии было не менее трех выстрелов Сколько выстрелов и какой результат соответствовал каждой серии?

Уральский государственный педагогический университет (УрГПУ)

Вариант 5 (1994)

1. Упростить выражение

$$\left(\left(\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}}{b}-\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right):\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+4\sqrt{ab}}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

2. Упростить выражение $\dfrac{\cos^2(\frac{3}{2}\pi-4\alpha)+4\sin^2(3\pi+2\alpha)-4}{1+\sin(8\alpha-\frac{\pi}{2})-8\cos^2(\frac{7\pi}{2}-2\alpha)}$

и вычислить его при значении $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3. Решить уравнение $\cos^2 x-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{7}} x-\log_{\frac{1}{7}}(2x-5)\ge\log_{\frac{1}{7}} 2-\log_{\frac{1}{7}}(x-3)$.

5. Из пункта А в пункт В выехал мотоциклист, а через 3 часа после него выехал второй мотоциклист и приехал в пункт В на 1 час позднее первого. Если бы первый мотоциклист выехал из пункта А в пункт В, а второй выехал бы одновременно из пункта В в пункт А, то их встреча произошла бы

через 1 час 20 минут. Сколько времени провел в пути первый мотоциклист?

6. Из вершины треугольника с основанием $a=60$ см проведены к основанию высота $h=12$ см и медиана $m=13$ см. Найти большую боковую сторону.

7. В основании треугольника пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол при вершине равен α . Найти объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β .

Вариант 6
(1995)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)^2:\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3).$$

3. Упростить выражение

$$\frac{4\sin(4\alpha-\frac{\pi}{2})}{ctg^2(2\alpha-\frac{3\pi}{2})-tg^2(2\alpha+\frac{5\pi}{2})}-1.$$

4. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x+\cos 2x=1.$

5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины боковой стороны AB и меньшего основания BC равны 2 см и диагональ BD перпендикулярна стороне AB. Вычислить площадь этой трапеции.

6. В правильную четырехугольную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, четыре другие вершины – на основании пирамиды. Определить ребро куба, если сторона основания пирамиды равна a.

Уральский государственный экономический университет (УрГЭУ)

Вариант 7
(1994)

1.Цена пары кроссовок повышалась дважды на одно и то же число процентов и достигла 9800 р. Найти это число, если известно, что первоначальная цена составляла 5000 р.

2. Решить уравнение $arcsin^2 x = 2$.

3. Найти все значения параметра k, при которых уравнение $x^2 - kx + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

4. На плоскости xOy указать все точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} |ay| - x^3 > 0, \\ y^2 - 2 \le 0. \end{cases}$

5. Найти длину интервала, на котором выполняется неравенство $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} < 0$.

6. В круг радиуса R вписан прямоугольный треугольник наибольшей площади. Найти отношение катетов этого треугольника.

7. Определить центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-3;-1)$, $B(5;3)$, $C(6;-4)$.

Вариант 8
(1995)

1. Найти наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $log_{\sqrt{5}}(2x - 1) + log_{\frac{1}{25}}(2x - 1) < \dfrac{5}{2}$.

2. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \dfrac{x}{2x - 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

3. Найти множество значений функции $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$.

4. Найти все решения уравнения

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1.$$

5. Инфляция за три месяца последнего квартала росла (в процентах) в геометрической прогрессии. При этом средний процент инфляции за 2 последних месяца оказался в 1.5 раза больше, чем за второй месяц квартала, а средний процент за квартал составил 14%. Найти эту прогрессию.

6. При каких значениях a неравенство $(5a - x)(3x - 6a - 9) > 0$ выполняется при всех x, принадлежащих отрезку $[-1;2]$.

7. Решить уравнение $4\sin^4 x + 7\cos 2x = 1$.

Уральский государственный профессионально-педагогический университет (УГППУ)

Вариант 9
(1994)

1. Решить уравнения и систему уравнений:

а) $3x - 1{,}2 = \frac{3}{25}x$; б) $\{x - 4y = 3,\ 2x + 3y = 17$; в) $x^{1 - \frac{1}{3}\lg x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0$.

2. Решить неравенства:

а) $12x + 7 \geq 3x + 5$; б) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \geq 0$; в) $0.5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0.5^{\sqrt{x}}$.

3. а) Построить графики функций: $y = \frac{1}{2}x - 3$; $y = -4x^2 + 8x$; $y = -2 + \sin x$. б) Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 20$.

4. а) Вычислить $ctg\frac{\pi}{6} \cdot ctg\frac{\pi}{3} - 2^{-\frac{1}{2}} + \log_3 \frac{1}{27}$.

б) Сократить дробь $\frac{25m^2 - m^4}{(5 - m)^2}$.

в) Упростить выражение $\frac{1}{2(1 + \sqrt{a})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a})} - \frac{a^2 + 2}{1 - a^3}$.

5. Решить задачи: а) В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найти длину боковой стороны треугольника. б) Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S. Найти длину высоты пирамиды, если угол грани при вершине пирамиды равен α.

6. Найти все целые значения m, при которых уравнение $\dfrac{x-4}{m-1}=\dfrac{m-6}{x}$ не имеет действительных корней.

Уральская академия государственной службы (УрАГС)

Вариант 10
(1994)

1. Решить уравнение $\dfrac{2x}{x-4}=\dfrac{10}{2x+7}+\dfrac{75}{2x^2-x-28}$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_{\sqrt{3}}(9-2x)}{\log_{\sqrt{3}}(2x+15)}<1$.

3. Лодка спустилась по течению на 28 км и сразу повернула обратно. На путь туда и обратно ей потребовалось 7ч. Если бы скорость реки была в 2 раза больше, то на путь туда и обратно ей потребовалось бы 11 ч 12 мин. Найти скорость лодки в стоячей воде.

4. Доказать тождество $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

5. На декартовой плоскости заданы два множества, состоящие из точек, координаты которых удовлетворяют условиям $\{y\ge 10x,\ 4x+ay\le 4$ и $0\le x\le\sqrt{4-y^2}$ соответственно. Найти все значения параметра a, при которых общая часть этих множеств имеет наибольшую площадь. Вычислить эту площадь. Изобразить эти множества.

6. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к графику фукнции $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}x$, построенная в точке с абсциссой $x=\dfrac{\pi}{6}$?

Вариант 11
(1995)

1. Упростить выражение $\left[\dfrac{x^2+4}{-64x}\left[\sqrt{1+\left[\dfrac{x^2-4}{4x}\right]^2}\right]^{-1}\right]^{-\frac{1}{4}}$.

2. Записать уравнение параболы $y = x^2 + px - q$, которая касается биссектрисы первого координатного угла в точке $(2;2)$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(16^{\sqrt{|x|}}\right)^{2\sqrt{y}} - 64 \cdot 4^{\sqrt{y}} = \log_{\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}\right)}\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right), \\ \log_{4y}|x| = \frac{1}{4}\log_{16y^2}(x^4). \end{cases}$$

4. Найти x, удовлетворяющие уравнению

$$\left|(1 - 2\sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - (1 - \sqrt{3})\right| = 1.$$

5. Найти длину окружности, описанной около треугольника ABC, если длины его боковых сторон AB и BC равны 14 и 6 см соответственно, а длина медианы, проведенной к стороне АС, равна 6 см.

6. Два банка, начисляющие проценты каждый месяц, имеют разные процентные ставки. Если фирма вкладывает $\frac{1}{5}$ своих средств в первый банк, а оставшуюся часть во второй банк, то через два месяца сумма этих вкладов с начисленными процентами оказывается равной 16400000 рублей. Если, наоборот, $\frac{1}{5}$ своих средств фирма вкладывает во второй банк, а оставшуюся часть – в первый банк, то через два месяца суммарный вклад с начисленными процентами составит 14900000 рублей.

Фирма решила применить комбинированную схему: сначала $\frac{1}{5}$ своих денег она внесла на 1 месяц в первый банк, а остальную часть на 4 месяца во второй банк. После начисления процентов в первом банке она переложила всю полученную в нем сумму на 6 месяцев во второй банк, а всю сумму, полученную из второго банка, – на 3 месяца в первый банк. Общий капитал, полученный из обоих банков в результате такой операции, составил количество рублей, выражающееся произведением $13^4 \cdot 12 \cdot 149$.

Найти месячные процентные ставки обоих банков, а также величину исходного капитала, которым владела фирма.

Уральская государственная горно-геологическая академия (УГГА)

Вариант 12
(1994)

1. Упростить выражение

$$\left(\left(\frac{(1-x)^{\frac{1}{4}}}{2(1+x)^{\frac{3}{4}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}}{2(1-x)^{\frac{3}{4}}}\right)\cdot\frac{1}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}\right):\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}.$$

2. Решить уравнение $4\cdot 3^{x}-9\cdot 2^{x}=5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$.

3. Решить неравенство $lg(x-2)-lg(8-x)<lg\frac{x}{8}$.

4. Упростить выражение $(tg^2 t-ctg^2 2t)\cdot sin^2 2t\cdot cos\, t$.

5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, имеющая длину a, составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью – угол β. Найти объем параллелепипеда.

Вариант 13
(1995)

1. Вычислить $(3\frac{1}{4}+\frac{1}{2}):15-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{5}-1{,}8\cdot\frac{2}{3}$.

2. Расположить в порядке убывания $\frac{3}{\pi}$, $log_{\sqrt{2}}1$, $tg\frac{3\pi}{4}$, $sin\frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение $cos^2 x=\frac{1}{2}$.

4. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x)=cos\,x-4\,sin\,x$.

5. Построить график функции $y=x^2+2x-3$. Чему равняется $y(-2)$?

6. Решить систему уравнений $\{x^2-3x+2=0, x+y=6$.

7. Решить уравнение $log_5(x^2-5)=2\,log_5(x-1)$.

8. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 4x + 8a > 0$ выполняется для любого значения x?

9. Решить неравенство $3^{\frac{2}{x}} \cdot 3^{\frac{5}{x+1}} < 1$.

10. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол α .

Уральская государственная академия путей сообщения (УрГАПС)

Вариант 14
(1995)

1. Вычислить $\dfrac{(6\frac{4}{5} - 3{,}3):4\frac{2}{3} + 1{,}75 \cdot \frac{2}{7}}{14{,}4 \cdot \frac{1}{6} - 2{,}15}$.

2. Упростить до числового ответа выражение

$$m + \left(\frac{1}{m^2 - 4} - \frac{m+7}{(m-2)^2}\right) : \frac{m+4}{(m-2)^2 \cdot (m+2)}.$$

3. Решить уравнение $2 \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 6} = 3x - 3$.

4. Решить неравенство $\dfrac{9x - 21}{7} + \dfrac{x - 3}{2 + lg\,0{,}001} - \dfrac{x}{2} < \dfrac{3}{2}$.

5. Найти область определения функции

$$f(x) = lg(x+1) + \sqrt{13 - 2x} + \frac{2}{2x - 9.}$$

6. Решить уравнение $\left(\dfrac{1}{7\sqrt{7}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5x-11}}} \cdot 49^{\frac{1}{\sqrt{5x-11}}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}.}$

7. Решить уравнение $log_3(3-x) + log_3(5-x) - log_3(x-1) = 1$.

8. Расстояние между станциями равно 54 км. В 14 км от станции отправления поезд был задержан на 10 минут. После задержки машинист увеличил скорость на 10 км/ч и привел поезд на станцию с опозданием в 2 минуты. Найти первоначальную скорость поезда

9. Второй член геометрической прогрессии равен 6, а пятый член равен 162. Сколько членов прогрессии, начиная с первого, нужно взять, чтобы сумма была равна 80?

10. Упростить до числового ответа выражение

$$\frac{\cos 2\alpha \cdot tg^2 240^0}{(\sin(75^0 + \alpha) - \sin(15^0 + \alpha)) \cdot \sin(45^0 + \alpha)}.$$

11. Вычислить $5\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 - \alpha)$, если $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ и $270^0 < \alpha < 360^0$.

12. Найти в градусах решение уравнения $tg\frac{5}{3}x + 2\sin 120^0 = 0$, удовлетворяющее условию $180^0 < x < 360^0$.

13. Вершины трапеции лежат на окружности так, что нижнее основание трапеции является диаметром окружности. Косинус угла между диагональю и нижним основанием трапеции равен 0,8. Найти радиус окружности, если высота трапеции равна 24 см.

14. Сечение правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро призмы перпендикулярно противоположной грани, является прямоугольником, длина диагонали которого равна 6 см. Эта диагональ составляет с плоскостью основания угол, равный 60^0. Найти объем призмы.

Уральская государственная лесотехническая академия (УГЛТА)

Вариант 15
(1994, факультет экономики и управления)

1. Вычислить $(1{,}6 \cdot 0{,}215 - 0{,}215) : (3{,}45 - 3{,}75) \cdot 1{,}43$.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}}{1 + a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}} + \frac{1 - \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) \cdot \frac{4(1 + \sqrt[4]{ab})}{\sqrt[4]{ab}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right).$$

3. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Какова первоначальная скорость мотоциклиста (в км/ч)?

4. Найти решение уравнения $(2 + 3|x|)^2 = 25|x|$, принадлежащее области определения функции $f(x) = \log_5(3x - 2)$.

5. Решить уравнение $\log_3(x^2 - 7^{\log_{\sqrt{7}} 5} + 24) - 2\log_3(x+1) =$ $= \frac{1}{4}(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{5} + 1 + \sqrt[3]{25})$.

6. Найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 2 - 3x$ и $y = 2x^2 + 7x + 14$. В ответе указать абсциссу точки пересечения с наибольшей ординатой.

7. Решить уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \pi \cos x\right) = 1$. В ответе указать в градусах решения x, удовлетворяющие условиям $-90^0 < x < 0^0$.

8. Дана функция $f(x) = \frac{1+2x}{1+3x}$. Найти $f'(1)$.

9. Найти множество значений параметра a, при которых уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{a+3}{5-a}$ имеет отрицательные решение. В ответе указать наибольшее целое значение a.

10. Прямые, проведенные из точки А, касаются окружности с центром О в точках В и С. Площадь треугольника АВО равна 3, а расстояние ВС равно $2\sqrt{3}$. Определить угол между касательными. Ответ записать в градусах.

Вариант 16
(1995, факультет экономики и управления)

1. Упростить выражение $\frac{(2a-2b)(a+b+\sqrt{ab})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})}$.

2. Под какой процент годовых должен вложить вкладчик в банк 80 тыс.р., желая получить через 3 года 10 млн р.?

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 4, x - 2y = 1. \end{cases}$

В ответе указать наименьшее значение y, удовлетворяющее системе.

4. Решить уравнение $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{x^3+1}$.

5. Решить уравнение $2\lg(\lg x) = \lg(3 - 2\lg x)$.

6. Найти отрицательное значение k, при котором график функции $y = x^2 + kx + 4$ касается оси Ox . Привести графическую иллюстрацию.

7. Найти наименьшее решение неравенства $\sqrt{x+2} > x$.

8. Вычислить без таблицы $tg 15^0 + ctg 15^0$.

9. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x$. В ответе указать значение функции в точке максимума.

10. Высота конуса равна $\frac{2}{3}$ диаметра его основания. Найти отношение площади основания конуса к площади боковой поверхности.

Уральская государственная сельскохозяйственная академия (УрГСХА)

Вариант 17
(1995)

1. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{2(a-b)} : \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - 3\sqrt{ab}.$$

2. Решить неравенство $log_2^{\,2}(x-1)^2 - log_{0.5}(x-1) > 5$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 4, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8, \end{cases}$

4. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α . Найти площадь полной поверхности конуса, если площадь поверхности шара равна S.

КУНСТКАМЕРА

№1. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \le \sqrt[4]{a^3}\left|sin\frac{\pi}{2}x\right|$ имеет хотя бы одно решение. №2. Найти наибольшее значение большего корня уравнения $x^2 + 2(a-b-3)x + a - b - 13 = 0$ при $a \ge 2,\ b \le 1$. №3. Найти все $a>0$, при каждом из которых $12x_0^3 - 7x_0 > 6a + 1$, где x_0 – единственный положительный корень уравнения $2x^3 + x^2 - x - a - 1 = 0$ при любом $a>0$. №4. Найти все такие значения x, что $|x| < 3$ и $\log_{2a-x^2}(x - 2ax) > 1$ для всех $a \geq 5$. №5. Найти все значения a, при которых область значений функции $y = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1;1]$. №6. Даны три утверждения: (1) уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ не имеет корней; (2) справедливо равенство $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$; (3) система $\{ x + y^2 = a,\ x - \sin^2 y = -3$ имеет единственное решение. Найти все значения a, при которых два из утверждений (1)–(3) истинны, а третье ложно. №7. Найти все $x < 1$, удовлетворяющие неравенству $\log_{\frac{x(a+1)}{3}}\left(\frac{ax^2}{9} + 1\right) < 1$ при всех $a \in \left(\frac{1}{2};2\right)$. №8. Найти все a, при которых минимум функции $f(x) = x^2 + 2|x + a - 1| + {}$ $+(a + 1)^2$ меньше трех. №9. Найти все a, b, c, d, при которых уравнение $xy = 1$ равносильно уравнению $axy + b\lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) = c + d\lg(\sqrt{x^2 + 1} - x)$. №10. Найти все a, b, при которых система $\left\{\left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a,\ x^2 + y^2 = b\right.$ имеет единственное решение (x_0, y_0) такое, что $x_0 > 0$. №11. Найти все a такие, что для любого b найдется c, для которого система $bx - y = ac^2$, $(b - 6)x + 2by = c + 1$ совместна. №12. Найти все a, при которых минимум функции $f(x) = |x + a| + |x - a|$ на отрезке $[-1;1]$ больше максимума функции $g(x) = |x^2 + ax|$ на этом же отрезке. №13. Для каждого $a \in (0;1)$ найти наименьшее значение выражения $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2} - a(x - y)$ при условии $\sin \pi xy = 0$. №14. Найти все a, b, при которых наибольшее значение функции $f(x) = \left|4 \cdot \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + \right.$

$+(2a+4b)\dfrac{3^x-1}{3^x+1}+2a+b\Big|$ на отрезке $[-1;1]$ является наименьшим. №15. Найти все $a\in[-1;1]$, для которых выражение $1-2\sqrt{4x^2+4bxy+y^2+8y+18}$ принимает наибольшее значение лишь при одной паре (x,y). №16. Найти значения a, b, c такие, что c является наименьшим при условии, что пары $(2,0)$, $(0,2)$ и $(6,4)$ удовлетворяют неравенству $x^2+y^2-2(ax+by)+a^2+b^2-c^2\le 0$. №17. Найти все b такие, что для любого a функция $f(x)=a+\sqrt{-x^2-2x+2bx-b^2+2b+8}$ является четной.

ОТВЕТЫ
Репетиции

Вариант 1

№1. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, k, l \in Z$. №2. $x \le 0, \log_6 5 \le x < 6$.

№3. $a = 3,\ a \ge 7$. №4. $\frac{a^3}{3}$.

Вариант 2

№1. $x = \frac{\pi k}{8},\ k \ne 2 + 4l,\ k, l \in Z$. №2. $x \le -2,\ 1 < x < \log_2(5 - 2\sqrt{2})$,

$\log_2(5 + 2\sqrt{2}) < x < 3$. №3. $\frac{5}{9} < a \le 1,\ a \ge 6$. №4. 100π см^2

Вариант 3

№2. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. №3. $x = 1,\ x = 4$.

№4. 10. №5. 12ч. №6. $-1 - \sqrt{2} \le a \le -1 + \sqrt{2}$.

Вариант 4

№2. 3 и 2. №3. $a < \frac{1 - \sqrt{34}}{2}$. 34. $x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{2\pi}{3}$. №5. $\frac{64\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{3\sqrt{3}}$.

№6. $3, 6$ и 5 выстрелов; $8, 24$ и 24 очка в серии.

Вариант 5

№1. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. №2. $\frac{1}{2} ctg^4 2\alpha;\ 0$. №3. $x = \pi k,\ k \in Z$. №4. $3 < x \le 5$.

№5. 4ч. №6. 37см. №7. $\frac{S^{\frac{3}{2}} \cdot tg\beta}{3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\sin\alpha}}$.

Вариант 6

№1. $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$. №2. $2 < x \le 4$ №3. $-\cos^2 4\alpha$. №4. $x = \pi k,\ x = (-1)^l \frac{\pi}{3} + \pi l$,

$k, l \in Z$. №5. $3\sqrt{3}$ см^2. №6. $\frac{a\,tg\alpha}{tg\alpha + 2}$.

Вариант 7

№1. 40%. №2. $x_{1,2} = \pm \sin\sqrt{2}$. №3. $-2 < k < 2$. №5. 1. №6. 1.

№7. Центр – в точке с координатами $(2;-1)$; радиус равен 5.

Вариант 8

№1. $x = 2$. №2. 2. №3. $\{0\}$ №4. $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_3 = \frac{9+\sqrt{17}}{4}$.

№5. $6,\ 12,\ 24$. № 6. $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{5}$. №7. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

Вариант 9

№1. а) $\frac{5}{12}$. б) $x = 7, y = 1$. в) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 100. №2. а) $x \geq -\frac{2}{9}$. б) $x \in R$. в) $x>0$ №3. б) $(-\infty;-3), (2,+\infty)$ – промежутки возрастания функции; $(-3;2)$ – промежуток убывания ее. №4. а) $\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 18}{6}$.

б) $\frac{m^2(5+m)}{5-m}$. в) $\frac{-1}{1+a+a^2}$ при $a \geq 0$ и $a \neq 1$. №5. а) $\frac{r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

б) $\frac{\sqrt{S(ctg\frac{\alpha}{2} - 1)}}{2}$. №6. $1;\ 3;\ 4$.

Вариант 10

№1. $2{,}5$. №2. $-7{,}5<x<-7;\ -1{,}5<x<4{,}5$. №3. 9км/ч. №5. $a \geq \frac{2}{\sqrt{101}-5}$, $S = 2arctg10$. №6. $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 11

№1. 2 при $x<0$. №2. $y = x^2 - 3x + 4$. №3. $(-1;1)$. №4. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{2},\ k,l \in Z$. №5. 21π. №6. $20\%,\ 30\%,\ 10py$.

Вариант 12

№1. $\frac{1}{1-x^2}$. №2. $x = 4$. №3. $2 < x < 4$. №4. $-\cos 3t$.

№5. $a^3\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \cdot \sin\alpha \sin\beta$.

Вариант 13

№1. 0. №2. $\sin\frac{\pi}{2} > \frac{3}{\pi} > \log_{\sqrt{2}} 1 > tg\frac{3\pi}{4}$. №3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$.

№4. $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$. №5. Искомый график получается из параболы с уравнением $y = x^2$ сдвигом на единицу влево вдоль оси Ox с последующим сдвигом полученного графика на 4 единицы вниз вдоль оси Oy; $y(-2) = -3$. №6. $(2;4)$, $(1;5)$. №7. $x = 3$.

№8. $a > \frac{1}{2}$. №9. $x < -1$, $-\frac{2}{7} < x < 0$. №10. $\frac{2}{3} l^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$.

Вариант 14

№1. 5. №2. -4. №3. 3. №4. $x > -7$. №5. $-1 < x < 4{,}5$; $4{,}5 < x \le 6{,}5$. №6. 3. №7. 2. №8. 50км/ч. №9. 4. №10. 6. №11. 7. №12. 288^0. №13. 25см. №14. $13{,}5$ см^3.

Вариант 15

№1. $0{,}6149$. №2. 4. №3. 40 км/ч. №4. 1. №5. 2. №6. -2. №7. -60^0. №8. $-0{,}0625$. №10. 90^0

Вариант 16

№1. 2. №2. 400%. №3. $-0{,}25$. №4. 2. №5. 10. №6. -4. №7. -2. №8. 4. №9. 20. №10. $0{,}6$.

Вариант 17

№1. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$. №2. $x < 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}}$, $x > 3$. №3. $(41;40)$.

№4. $S\sin^2\alpha\cos\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)$.

Кунсткамера

№1. $a = \frac{1}{16}$. №2. 6. №3. $0 < a < \frac{1}{54}$. №4. $-3 < x < -1$. №5. $a \le \frac{1}{8}$.

№6. (1), (2) истинны, а (3) ложно при $|a| < 2$; (1), (3) истинны, а (2) ложно ни при каких a; (2), (3) истинны, а (1) ложно при $a = -3$. №7. $0 < x < 1$. №8. $-1 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$. №9. $a = c \ne 0$, $b = -d$.

№10. $a = 0,\ 0 < b \le 1$. №11. $-\frac{1}{12} \le a \le \frac{1}{8}$. №12. $|a| > 1$.

№13. $a \le 2 - \sqrt{2} \Rightarrow -\frac{a^2}{2}$; $a > 2 - \sqrt{2} \Rightarrow 1 - 2a$. №14. $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{6}$.

№15. $|a| \le \frac{1}{3}$. №16. $a = b = 3,\ c = \sqrt{10}$. №17. $b=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Важенин Ю.М., Дулесов К.Г.* Руководство по математике для поступающих в вузы. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1995.

2. Задачи вступительных экзаменов по математике в вузы Екатеринбурга в 1993 году/ Под ред. К.Г.Дулесова и В.В.Расина. Екатеринбург: УрГУ, 1994.

3. Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузы Екатеринбурга в 1994 году / Под ред. Ю.М.Важенина, К.Г.Дулесова и В.В.Расина. Екатеринбур: Изд-во Урал.ун-та, 1995.

4. Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузы Екатеринбурга в 1995 году / Под ред. Ю.М.Важенина, К.Г.Дулесова, Ю.Н.Мухина и В.В.Расина. Екатеринбург: УрГУ, 1996.

5. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителями математики. М.: Школа-пресс, 1995.

6. *Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.* Математика для абитуриента. М.: НТЦ “Университетский”, 1994.

7. *Ткачук В.В.* Математика – абитуриенту. М.: Теис, 1995. Т.1.

8. 514 задач с параметрами/ Под ред. С.А.Тынянкина. Волгоград, 1991.

9. *Шарыгин И.Ф.* Математика для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1995.

Юрий Михайлович Важенин
Самоучитель решения задач с параметрами

Редактор **Т.А.Сасина**
Технический редактор **Э.А.Максимова**

ЛР №020257 от 10.10.91.

Подписано в печать 13.06.96. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд. л.5.0. Усл. печ. л. 5.0. Заказ 659. Тираж 1000 экз.
Уральский государственный университет им. А.М.Горького.
Екатеринбург, пр.Ленина, 51.
Типолаборатория УрГУ. Екатеринбург, пр.Ленина, 51.